HISTOIRE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES.

ECCL. LABORA ET NOLI CONTRISTARI

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES,

PAR

RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE
ET EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME I

DE THALÈS A DIOPHANTE.

PARIS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1883

31063

PRÉFACE.

L'histoire que j'ai désiré écrire est celle de la filiation des idées et des méthodes scientifiques.

Il ne faut donc chercher dans cet Ouvrage ni tentatives de restitutions de faits inconnus ou d'ouvrages perdus, ni découvertes bibliographiques, ni discussions sur les faits incertains ou les dates douteuses, ni hypothèses sur la science des peuples qui ne nous ont transmis aucun monument certain de leur savoir.

Je suis très éloigné de croire inutiles ou chimériques les recherches dirigées dans l'un des sens que je viens d'indiquer, mais enfin je ne m'en suis pas occupé.

Il n'est pas nécessaire qu'un même ouvrage contienne tout ce qu'il était possible d'y mettre, il y en a d'autres; l'important

est qu'il contienne des choses utiles, qui ne se trouvent pas ailleurs.

Je ne sais si j'ai atteint le but que je me proposais; tout ce que je puis dire, c'est que j'ai toujours rêvé d'écrire ce livre, et qu'il y a quarante ans que je m'en occupe.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PÉRIODE.

De THALÈS, né vers — 640,
à ARISTARQUE de Samos, né en — 310.

Noms des savants de cette Période.

Les dates indiquées dans cette Table et dans les suivantes, placées en tête des différentes périodes, ne sont pas toutes certaines; nous avons adopte celles qui nous ont paru le plus probables. Lorsqu'il y a doute, ce doute est mentionne dans le texte.

	Né en	Mort en
THALÈS	— 640	— 550
ANAXIMANDRE	— 610	— 547
ANAXIMÈNES	— 570	— 480
PYTHAGORE	— 569	— 470
PARMÉNIDE d'Élée	— 519	— 440
HIATAS de Syracuse	— 510	— 450
ECPHANTUS	— 510	
ANAXAGORE	— 500	— 428
ŒNOPIDES de Chios	— 500	
EUCTEMON	— 460	
MÉTHON	— 460	
HIPPOCRATE de Cos	— 460	— 380
HIPPOCRATE de Chios	— 450	
CLÉOSTRATE	— 450	
ZÉNODORE	— 450	
PHILOLAÜS	— 450	
ARCHYTAS de Tarente	— 440	— 380
PLATON	— 430	— 380
HÉLICAN de Cyzique	— 410	
EUDOXE de Cnide	— 409	— 356
ARISTOTE	— 384	— 322
MÉNECHME	— 375	
DINOSTRATE	— 375	
THÉOPHRASTE	— 371	— 264
CALIPPE	— 360	
EUDÈME de Rhodes	— 350	— 290
AUTOLYCUS	— 340	
PYTHÉAS	— 330	
CONON de Samos	— 320	
ARATUS	— 320	— 280
TIMOCHARIS	— 320	— 260
EUCLIDE	— 315	— 255
BION d'Abdère	— 300	
HÉLIODORE de Larisse	— 290	
PERSÉE de Cittium	— 290	— 244

PREMIÈRE PÉRIODE.

Dans cette période, les recherches géométriques se développent à côté des premiers essais de calcul arithmétique, mais sans qu'aucun rapport soit encore soupçonné entre les deux sortes de spéculations.

Les Grecs savent compter; ils n'achèteraient pas un champ sans en estimer la contenance, approximativement, c'est-à-dire en négligeant les petits excédents dans la mesure, et les menues monnaies dans le payement.

Mais les géomètres grecs ne spéculent que sur les grandeurs elles-mêmes, jamais sur leurs mesures.

Apollonius eût certainement regardé comme fou l'homme qui serait venu lui proposer d'introduire la longueur du pied d'Agamemnon, par exemple, dans la démonstration de ses théorèmes sur les coniques. Que pouvait faire en effet la longueur du pied d'Agamemnon à l'égalité ou à la non-égalité des angles de la tangente à l'ellipse en un de ses points, avec les rayons vecteurs menés de ce point aux deux foyers? Et si l'homme,

supposé arpenteur, avait insisté, Apollonius, à moins qu'il ne lui eût tourné le dos, lui aurait certainement répondu : Mais la longueur du pied d'Agamemnon serait incommensurable avec la plupart de celles sur lesquelles je raisonne ; les mesures de celles-ci, par conséquent, ne seraient qu'approchées; si je m'en servais, toutes mes spéculations seraient fausses et je ne parviendrais qu'à démontrer que la somme des carrés construits sur deux diamètres conjugués d'une ellipse est à peu près constante.

L'impossibilité de représenter exactement en nombres, au moyen d'une même unité, toutes les grandeurs sur lesquelles ils auraient à spéculer, aurait fait reculer tous les géomètres de cette époque, s'ils en avaient eu l'idée. Mais cette idée même ne leur est jamais venue, par la raison toute simple qu'une grandeur étrangère à la figure étudiée ne pouvait pas leur paraître utile à considérer.

Aussi les énoncés des théorèmes relatifs aux évaluations des urfaces et des volumes ne revêtent-ils jamais chez eux la forme que nous leur donnons.

Euclide ne dit pas : Un rectangle a pour mesure le produit des mesures de sa base et de sa hauteur, bien que, s'il eût eu à payer un champ rectangulaire, il en eût estimé le prix, à une drachme près, par le même calcul que nous ferions aujourd'hui; il dit : Deux rectangles quelconques sont entre eux en *raison composée* de leurs bases et de leurs hauteurs, c'est-à-dire deux rectangles R et R′, de bases B et B′ et de hauteurs H et H′ sont entre eux comme la base B est à une quatrième proportionnelle à H, H′ et B′, ce que nous écririons

$$R : R' :: B : \left(B'\frac{H'}{H}\right);$$

mais il ne notait ni la proportion ni, à plus forte raison, la qua-

trième proportionnelle ; ou comme une quatrième proportionnelle à H′, H et B est à B′, c'est-à-dire

$$R : R' :: \left(B\frac{H}{H'}\right) : B' ;$$

ou encore comme H est à une quatrième proportionnelle à B, B′ et H′,

$$R : R' :: H : \left(B'\frac{H'}{B}\right) ;$$

ou enfin comme une quatrième proportionnelle à B′, H et B est à H′,

$$R : R' :: \left(H\frac{B}{B'}\right) : H' ;$$

car Euclide connaissait parfaitement toutes les transformations qu'on peut faire subir à une proportion.

De même, Archimède ne dit pas : L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de la mesure de sa circonférence par la mesure de son rayon, mais : Un cercle est égal au triangle qui aurait pour base sa circonférence et pour hauteur son rayon. Il ne dit pas : La surface de la sphère a pour mesure le produit des mesures de la circonférence d'un grand cercle et du diamètre, mais : La sphère est égale en surface au cylindre qui aurait pour base un grand cercle et pour hauteur un diamètre, etc.

Les géomètres grecs de la période que nous considérons possédaient, comme moyen logistique, une Algèbre déjà très avancée, quoique fondée entièrement sur les transformations dont est susceptible une proportion. Mais c'étaient les grandeurs elles-mêmes et non leurs mesures qui entraient dans leurs formules, notées en langage ordinaire.

En fait, ils savaient résoudre tous les problèmes du second degré à une inconnue; en effet, ils savaient ramener la résolution des proportions par lesquelles nous passons encore aujourd'hui, avant d'arriver aux équations elles-mêmes (car c'est toujours de quelque relation de similitude que nous tirons ces équations), soit à la construction d'une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs, ce qui revient à la résolution d'une équation de la forme

$$x^2 = ab;$$

soit à la construction des côtés d'un rectangle dont on donne le demi-périmètre et la surface représentée par un carré, ce qui revient à la résolution d'une équation de la forme

$$x^2 - px + q^2 = 0;$$

soit à la construction des côtés d'un rectangle, connaissant leur différence et la surface de ce rectangle, ce qui revient à la résolution d'une équation de la forme

$$x^2 \pm px - q^2 = 0.$$

De sorte qu'il ne restait en dehors de leur analyse que les équations de la forme

$$x^2 + px + q^2 = 0,$$

qui n'ont pas de solutions proprement dites et qui, par conséquent, ne pouvaient se présenter à eux.

On doit, au reste, remarquer que les figures de construction des problèmes dont nous venons de parler fournissaient d'elles-mêmes les formules de résolution des équations correspondantes.

Ainsi, par exemple, dans le cas du problème de diviser une

droite donnée P en deux parties, dont la moyenne proportionnelle soit une droite donnée Q, la figure dit d'elle-même, sans qu'il y ait besoin d'aucun commentaire, que les deux parties cherchées sont la moitié de P, plus ou moins le second côté d'un triangle rectangle dont l'autre serait Q et l'hypoténuse $\frac{P}{2}$.

Si même les Grecs l'eussent voulu, le théorème de l'équivalence entre le rectangle construit sur la somme de deux lignes et leur différence avec la différence des carrés construits sur ces deux lignes leur eût permis de remplacer la formule précédente par celle-ci : *Les deux côtés du rectangle cherché ont pour valeurs la moitié de* P *plus ou moins la moyenne proportionnelle entre la moitié de* P *moins* Q *et la moitié de* P *plus* Q.

Un peu plus tard, le problème de la duplication du cube leur suggérait l'idée de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs données, mais cette idée n'avait non plus dans leur esprit aucun rapport ni prochain ni éloigné avec l'extraction de la racine cubique d'un nombre, sans quoi ils n'auraient pas cherché si longtemps la solution ; de $x^3 = 2$ ils auraient de suite tiré $x =$ racine cubique de 2. Mais ce n'est pas ainsi qu'ils y parvinrent.

C'est après bien des transformations qu'ils sont arrivés à cette conclusion que le côté du cube cherché, double du cube ayant pour côté A, devait être la première des deux moyennes proportionnelles entre A et le double de A, c'est-à-dire que si l'on pouvait trouver les longueurs X et Y satisfaisant aux conditions $A : X :: X : Y :: Y : 2A$, X serait le côté du cube cherché.

Les Grecs ne songèrent jamais à séparer leur Algèbre de leur Géométrie, c'est-à-dire l'art de raisonner de l'objet du raisonne-

ment; mais cette Algèbre n'est pas restée pour cela à l'état virtuel; elle est, au contraire, en action dans tous leurs écrits.

Il ne leur a véritablement manqué, pour constituer l'Algèbre, que l'idée d'en faire des traités à part, et celle de substituer des signes aux indications, en langage ordinaire, des opérations à effectuer sur les grandeurs. S'ils avaient représenté par $A+B$, ou de toute autre manière, la somme de deux longueurs A et B; par $A-B$ leur différence; par $A\frac{B}{C}$ la quatrième proportionnelle aux trois longueurs C, A et B; par $\sqrt[2]{A.B}$ la moyenne proportionnelle entre les longueurs A et B; par $\sqrt[3]{A.B}$ la première de deux moyennes proportionnelles insérées entre A et B, etc.; par $\sqrt[n]{A.B}$ la première des $n-1$ moyennes proportionnelles insérées entre A et B, l'Algèbre aurait un nom grec au lieu d'un nom arabe, et cependant les géomètres grecs n'en auraient pour cela ni plus ni moins fait d'Algèbre qu'ils n'en ont fait.

Il existera toujours beaucoup de gens aux yeux desquels il n'y aura pas d'Algèbre là où ils n'apercevront ni $+$, ni $-$, ni $\sqrt{}$, ni $=$, ni $<$, ni $>$.

Cependant, qu'on appelle x l'inconnue d'une équation ou qu'on l'appelle *la chose*, cela n'y fait rien, pourvu qu'on résolve l'équation; et il importe peu que la formule de résolution soit écrite en signes cabalistiques ou en langage ordinaire.

Les notations ont l'immense avantage de faciliter la lecture des équations et de permettre d'en apercevoir plus aisément les transformations utiles; elles sont une condition presque indispensable de progrès; mais des résultats acquis, déjà fort considérables, obtenus sans le secours des notations et, par cela même, beaucoup plus méritoires, constituent bien une vraie science.

Progrès de la Géométrie.

Les origines de la Géométrie nous sont naturellement inconnues. Les notions de perpendicularité et de parallélisme, les conditions d'égalité des triangles, les propriétés les plus élémentaires du cercle relatives à ses diamètres, à ses cordes et à ses tangentes, enfin les premières notions de la sphère devaient être familières aux Égyptiens; mais si, comme on le croit, Thalès leur enseigna les moyens de mesurer la hauteur d'un obélisque par la grandeur de son ombre, leurs connaissances en Géométrie n'allaient pas plus loin que ces notions instinctives qui résultent simplement de l'attention.

L'histoire de la Géométrie pour nous commence à Thalès, à qui on attribue la remarque qui forme la base de la théorie de la similitude, savoir : que les triangles équi-angles ont leurs côtés proportionnels.

Peu après Thalès, Pythagore dotait la science du théorème du carré de l'hypoténuse, dont l'invention avait sans doute été précédée de l'étude des relations simples entre les surfaces des parallélogrammes et des triangles.

La théorie des polygones réguliers naissait en même temps dans l'école de Pythagore, qui probablement s'éleva jusqu'à la considération des volumes des parallélépipèdes, au moins dans les cas les plus simples, puisque le problème de la duplication du cube y était déjà posé.

Hippocrate de Chios, célèbre par ses lunules, avait déjà ramené le problème de la duplication du cube à celui de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs

données; Archytas, Platon et ses disciples Eudoxe et Ménechme donnèrent de ce problème des solutions diverses, par des intersections de coniques, et fondèrent la théorie des lieux géométriques, qui prit, dans l'école d'Athènes, le nom de *Géométrie transcendante*. et la méthode analytique.

Dinostrate imaginait, à la même époque, sa célèbre quadratrice pour la division d'un angle en un nombre quelconque de parties proportionnelles à des longueurs données et pour la quadrature du cercle.

Les résultats des recherches des géomètres de l'école de Platon, sur les sections du cône droit, avaient été recueillis et mis en ordre par Aristée, dans un ouvrage en cinq livres, dont les anciens faisaient grand cas, mais qui ne nous est pas parvenu.

Hippocrate de Chios, Théon, Theudius de Magnésie, Hermotime de Colophon, Eudoxe et Thœtète, avaient écrit des traités de Géométrie élémentaire, que celui d'Euclide fit oublier, mais qui, cependant, existaient encore du temps de Proclus.

Enfin Euclide, outre des travaux personnels admirés de ses successeurs, mais que nous ne pouvons malheureusement pas apprécier très sûrement, les ouvrages où ils étaient consignés étant presque tous perdus, avait résumé la plus grande partie de la Géométrie élémentaire dans un ouvrage qui devait rester un modèle pendant deux mille ans.

La Géométrie durant cette période fut poussée beaucoup plus loin qu'aux limites de la Géométrie élémentaire, et la théorie des coniques y avait déjà pris de grands développements, mais nous les délimiterons plus loin.

Progrès de l'Arithmétique.

L'Arithmétique étant restée totalement étrangère aux spéculations des géomètres, pendant toute la période que nous considérons, et ayant, par conséquent, fait très peu de progrès, nous n'avons à en dire que quelques mots pour faire connaître la numération des Grecs et leur manière de calculer.

Les Grecs représentaient les neuf premiers nombres par les premières lettres de leur alphabet, les neuf premiers nombres de dizaines par les lettres suivantes et les neuf premiers nombres de centaines par les dernières.

Seulement, comme ils n'avaient pas dans leur alphabet les vingt-sept lettres qui leur eussent été nécessaires, ils intercalaient trois signes : l'un avant le *zèta*, c'était le stigma ou digamma (deux fois γ ou deux fois trois), ϛ, correspondant au *vaou* des Hébreux, dont les Grecs avaient pris le système de numération ; un autre après le *pi*, appelé *coppa*, ϟ, correspondant au *coph* des Hébreux ; et le troisième après l'*ôméga*, appelé *sampi*, ϡ, formé d'un *pi* dans un *sigma*.

Ils reprenaient ensuite les neuf premières lettres, mais alors marquées d'un *iota* souscrit, pour représenter les neuf premiers nombres de mille. Ils auraient pu employer les dix-huit signes suivants, marqués également d'un iota souscrit, pour figurer les neuf premiers nombres de dizaines de mille et les neuf premiers nombres de centaines de mille, mais ils n'y songèrent pas.

Ils auraient même pu continuer indéfiniment avec deux iota souscrits, trois iota, etc., mais ils n'avaient jamais l'occasion de se servir de si grands nombres.

C'est Archimède qui, le premier, songea à dépasser dix mille, ou une myriade ; encore n'imagina-t-il pas de prolonger la numération comme nous venons de le dire. Il fit de la myriade une nouvelle unité, ce qui rompait la série ; mais son système de numération ne fut jamais suivi, et ses successeurs, jusqu'à Pappus même, lorsqu'ils avaient à écrire des nombres dépassant 10 000, écrivaient le nombre de myriades, qu'ils faisaient suivre des initiales Μυ, puis le nombre moindre que 10 000.

Ainsi, dans la période qui nous occupe, la numération écrite s'étendait jusqu'à 9999.

α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, θ

signifiaient respectivement

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ;

ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϙ

représentaient

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 ;

ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ

figuraient

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 :

enfin

͵α, ͵β, ͵γ, ͵δ, ͵ε, ͵ϛ, ͵ζ, ͵η, ͵θ

représentaient

1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000.

On écrivait habituellement les chiffres des plus hautes unités à gauche des chiffres des plus faibles, ainsi :

͵βφξζ

représentait le nombre

2567.

Chaque chiffre portant en lui sa valeur numérique et l'ordre d'unités qu'il représentait, le zéro n'avait pas de raison d'être, et, quand un nombre manquait des unités d'un certain ordre, on passait le chiffre correspondant à cet ordre ; par exemple :

φζ

représentait

507.

Quant à leurs opérations, dont ils n'ont laissé de traces dans leurs écrits que beaucoup plus tard, lorsque l'Astronomie commença à prendre corps, on sait seulement que les Grecs les commençaient habituellement par la gauche, à peu près comme les modernes calculaient sur les nombres complexes, avant que le système décimal fût universellement adopté.

On ne rencontre naturellement encore aucun exemple de fraction notée dans les ouvrages des géomètres de cette période, les nombres entiers eux-mêmes n'y étant employés qu'au numérotage des propositions.

Progrès de l'Astronomie.

Ils se réduisent pour ainsi dire à l'invention du gnomon, qui pouvait servir à déterminer grossièrement la méridienne, les époques des solstices, l'inclinaison de l'équateur sur l'horizon et celle de l'écliptique sur l'équateur.

Il faut noter cependant l'opinion formellement établie dans

l'école de Pythagore, du mouvement diurne de la Terre autour de la ligne de ses pôles et, peut-être, autour du Soleil, dans le cours d'une année.

L'année étant, de toute antiquité en Grèce, lunaire et solaire. la grande question était, pour les astronomes grecs, d'obtenir un accord entre les mouvements du Soleil et de la Lune. Aussi voit-on apparaître successivement chez eux différents cycles, proposés chacun pour remédier aux inexactitudes constatées durant l'usage du précédent.

BIOGRAPHIE

DES

SAVANTS DE LA PREMIÈRE PÉRIODE

ET

ANALYSE DE LEURS TRAVAUX.

THALÈS.

(Né à Milet vers — 640, mort vers — 550.)

Le plus ancien et le premier des sept sages de la Grèce, fondateur de l'école Ionique. Il était allé chercher en Égypte les premières notions des sciences.

L'année civile des Égyptiens se composait de douze mois, chacun de trente jours, mais ils y ajoutaient cinq jours complémentaires. Ils partageaient le jour et la nuit chacun en douze heures. Ils savaient tracer la méridienne et connaissaient les deux mouvements du Soleil, l'un diurne et l'autre annuel. Ils savaient que le Soleil se déplace par rapport aux étoiles dans un cercle incliné à l'équateur, que les Grecs appelèrent d'abord le *cercle oblique* (λοξὸς κύκλος), et qui s'est appelé plus tard l'*écliptique*. Ils connaissaient les saisons et savaient un peu de Géométrie.

Thalès rapporta en Grèce toutes ces connaissances et les répandit dans son école.

On croit qu'il connaissait les causes des éclipses du Soleil et de la Lune; mais c'est supposer qu'il connut la sphéricité de la Terre.

Il enseigna à mesurer la hauteur des monuments par la grandeur de leur ombre, ce qui prouve qu'il avait une notion de la similitude des figures.

Il connaissait la propriété électrique de l'ambre jaune.

ANAXIMANDRE.

(Né à Milet vers — 610, mort vers — 547.)

Disciple de Thalès et son successeur à la tête de l'école Ionique. Il inventa les globes célestes, construisit des cartes géographiques et imagina, ou du moins importa en Grèce le précieux instrument appelé *gnomon*, composé simplement d'une tige verticale fixe, mais qui pouvait donner la méridienne, par la direction de la ligne la plus courte d'ombre, dans l'intervalle d'une même journée; les hauteurs maximum et minimum du Soleil au-dessus de l'horizon, aux deux solstices, par les angles de l'horizontale méridienne avec les droites joignant le sommet de la tige aux extrémités de l'ombre méridienne, lorsque cette ombre atteignait sa plus petite ou sa plus grande valeur annuelle; l'inclinaison de l'équateur sur l'horizon, par la hauteur du Soleil à midi le jour de l'équinoxe, ou par la demi-somme des hauteurs méridiennes du Soleil aux deux solstices; enfin l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur par la demi-différence des mêmes hauteurs du Soleil à midi, aux deux solstices.

Suivant Diogène Laërce, ce serait à Sparte qu'Anaximandre

aurait établi son gnomon ; mais on ne sait s'il en a tiré tout ou partie seulement des conséquences que les observations pouvaient lui fournir ; s'il a déterminé ou non la latitude de Sparte ; s'il a ou non obtenu l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, et, dans l'hypothèse affirmative, qui du reste est probable, quelle valeur il lui assignait.

ANAXIMÈNE DE MILET.

(Né vers — 570, mort vers — 499.)

Croyait le Soleil et la Lune plats comme des disques. Pline lui attribue l'invention du cadran solaire. Il est probable que Pline s'est trompé. Anaximène aura sans doute ajouté à la méridienne, fournie par le gnomon, les lignes d'ombre correspondant aux différentes heures de la journée ; mais ces lignes, construites un jour de l'année, ne pouvaient fournir que très inexactement les heures aux autres époques.

PYTHAGORE.

(Né à Samos en — 569, mort à Tarente en — 470.)

Son père Mnésarque était Tyrien, et avait reçu des habitants de Samos le droit de cité, pour avoir amené dans l'île un chargement de blé pendant une disette.

Sa vie a été racontée par plusieurs auteurs dont les noms seuls nous sont parvenus. Ce que l'on en sait provient des écrits de Diogène Laërce, de Porphyre et de Jamblique, qui avaient

peut-être connu les récits des contemporains du philosophe, mais qui y mêlent tant de fables que la vérité est bien difficile à reconnaître.

Voici ce qui paraît le plus probable : Pythagore aurait, encore jeune, accompagné son père dans les expéditions qu'il avait à faire comme commerçant, le long des côtes de la Grèce et de l'Asie Mineure.

Il aurait quitté Samos en — 551, aurait suivi à Lesbos les leçons de Phérécide, à Milet celles de Thalès et d'Anaximandre et serait allé de là en Égypte où il aurait passé vingt-sept ans, tant à Memphis qu'à Thèbes, au milieu des prêtres et des savants.

Il aurait été emmené en captivité à Babylone, après la conquête de l'Égypte par Cambyse.

Là il se serait fait initier aux sciences des Chaldéens et y aurait eu connaissance des religions de l'Inde.

Enfin il obtint en — 512 la liberté de revenir dans sa patrie et revit Samos où ses parents vivaient encore.

Il visita ensuite l'île de Crète, Sparte, Élis et Delphes, puis retourna à Samos pour y fonder une école, mais ne réussit pas à y rassembler assez de disciples.

Il songea alors à s'établir en Sicile, où il n'aurait qu'à choisir entre Sybaris, Crotone, Syracuse et Agrigente.

Il aborda à Sybaris, professa publiquement à l'école de médecine de Tarente, enfin fonda à Crotone, dans la maison de Milon, l'école pythagoricienne.

Une belle jeune fille, Théano, l'épousa en — 509. On sait qu'elle écrivit la vie de son mari ; mais cet ouvrage ne nous est pas parvenu.

Pythagore exerça certainement une grande influence sur ses

nouveaux concitoyens. On venait le consulter de toutes parts, et il semble qu'imbu des idées théocratiques qu'il avait puisées en Égypte, il ait contribué à augmenter la domination des aristocraties qui gouvernaient Crotone et les cités voisines.

Sybaris venait de chasser ses tyrans, et les exilés s'étaient réfugiés à Crotone. Pythagore excita les Crotoniates à déclarer la guerre aux Sybarites, et Sybaris fut vaincue ; Pythagore, même, obtint dans la ville conquise une vaste demeure et de beaux jardins, où il transporta son école.

Mais les abus qui avaient soulevé les Sybarites s'étaient réfugiés à Crotone, avec les émigrés, et, ayant trouvé à s'y allier, y avaient multiplié.

Crotone à son tour subit une révolution démocratique qui emporta l'école de Pythagore.

Le vieux philosophe vit son collège incendié et ses disciples périr par le fer ou le feu (— 490).

Il se réfugia à Tarente où il mourut.

Ceux de ses amis ou disciples qui parvinrent à s'échapper, Ocellus de Lucanie, Timée de Locres, Philolaüs, etc., se réfugièrent en Grèce ou passèrent en Italie.

Nous avons dit de quelles incertitudes est entourée l'histoire de la vie de Pythagore ; on n'est pas beaucoup mieux fixé sur sa doctrine et sur l'étendue de ses connaissances scientifiques.

On ne sait pas même d'une façon certaine s'il avait connaissance du théorème de l'équivalence entre le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit. Le fait est probable, puisque toute l'antiquité l'a affirmé ; mais, en le supposant vrai, Pythagore avait-il décou-

vert lui-même cet important théorème, ou le tenait-il des Égyptiens? On ne peut se prononcer à cet égard.

La seule chose certaine est que, d'ailleurs exclusivement guidé en cela par des idées préconçues, il rejetait l'hypothèse de l'immobilité de la Terre, et bien certainement, avec beaucoup plus de raison, expliquait au moins tous les phénomènes astronomiques diurnes des levers et des couchers des astres, par un mouvement journalier de rotation de la Terre autour de son axe. Il ne peut rester aucune incertitude sur la réalité de cette croyance du maître, quand on la voit enseignée d'une manière uniforme dans tous les centres intellectuels, par les disciples mêmes de Pythagore, après leur dispersion, et par leurs successeurs.

Quant au mouvement annuel de la Terre, il paraît non moins certain que Pythagore n'en avait aucune idée nette, puisqu'il remplissait l'intervalle qui sépare la Terre des étoiles fixes par les astres mobiles, dans l'ordre suivant : la Lune, ce qui est très bien; Mercure, Vénus et le Soleil, ce qui n'a plus de sens; Mars, Jupiter et Saturne.

Du reste, il assignait aux distances (qu'il était donc obligé de regarder comme fixes) de la Terre à tous les astres mobiles, des valeurs tirées de la progression des sons musicaux (nous n'osons naturellement pas dire de la progression des nombres de vibrations correspondant aux notes de la gamme).

Il avait reconnu le même astre (Vénus) dans l'étoile du matin et dans l'étoile du soir; mais il ne pouvait naturellement pas savoir si Vénus passait alternativement devant et derrière le Soleil. D'après l'ordre des distances à la Terre qu'il supposait pour ces deux astres, il devait croire que la révolution de Vénus se faisait tout entière entre le Soleil et la Terre.

PARMÉNIDE D'ÉLÉE.

(Né à Élée, dans la grande Grèce, vers — 519, mort vers — 440.)

Il fut, suivant Speusippe et Plutarque, le législateur de sa patrie. Il fit, à soixante-cinq ans, un voyage à Athènes avec Zénon d'Élée, son disciple.

Comme physicien, il n'admettait que deux éléments, le feu et l'eau.

On lui attribue la première idée de la rondeur de la Terre et la constatation de l'idendité de Vénus, étoile du matin ou étoile du soir, selon sa position par rapport au Soleil.

Il reste de Parménide quelques fragments d'un poème astronomique; Scaliger les a imprimés dans ses notes sur Manilius.

HICÉTAS DE SYRACUSE.

(Né probablement vers — 510, mort vers — 450.)

Disciple de Pythagore, il partageait l'opinion commune des Pythagoriciens touchant le mouvement de la Terre. Cicéron, dans son second livre du *Traité de la nature des dieux,* rapporte ainsi son opinion : *Hicetas Syracusius, cœlum, solem, lunam, stellas, supera denique omnia stare censet, neque præter terram rem nullam in mundo moveri : quæ cum circum axem de summa celeritate convertat et torqueat, eadem effici omnia, quasi stante terra cœlum moveretur.*

ECPHANTUS.

(Né vers — 510.)

Disciple de Pythagore ; il doit être ajouté à la liste des anciens qui ont adopté l'opinion du mouvement diurne de la Terre.

ANAXAGORE.

(Né à Clazomène en — 500, mort à Lampsaque en — 428.)

Après avoir succédé à Anaximène à la tête de l'école Ionique, il alla fonder la première école philosophique que vit Athènes, et y eut pour disciples Périclès, Euripide et peut-être Socrate.

Il croyait le Soleil un peu plus grand que le Péloponnèse, et eut l'imprudence de le dire, ce qui le fit décréter d'impiété.

Il parvint toutefois à éviter une condamnation à mort, grâce à l'intervention de Périclès.

ŒNOPIDES DE CHIOS.

(Contemporain d'Anaxagore.)

Géomètre et astronome, on lui attribue l'invention d'un cycle composé de cinquante-neuf ans, au bout desquels il pensait que le Soleil et la Lune reprenaient les mêmes positions dans le Ciel.

EUCTÉMON.

(Né vers — 460.)

Est associé à Méthon dans l'invention du cycle luni-solaire ou ennéadécaéteride adoptée en —433. Il fixa avec plus d'exactitude le lever des pléiades et observa quelques solstices.

MÉTHON.

(Né vers — 460.)

Célèbre par l'invention de son cycle luni-solaire, que la Grèce adopta en — 433.

Les solennités grecques étaient réglées à la fois sur le cours du Soleil et sur celui de la Lune. Mais l'insuffisance des connaissances astronomiques amenait souvent de grandes confusions. Aristophane y fait une allusion comique dans ses *Nuées ;* il feint que les dieux se plaignent de ne plus savoir quels jours ils doivent se présenter pour jouir des sacrifices qui leur sont offerts, et qu'ils ont trop souvent le déplaisir de s'en retourner à jeun.

Le cycle de Méthon était formé de dix-neuf ans, au bout desquels la Lune et le Soleil se retrouvent à très peu près dans la même situation par rapport à la Terre et aux étoiles.

De ces dix-neuf années. douze étaient communes, c'est-à-dire composées chacune de douze lunaisons; les sept autres, qui étaient les troisième, sixième, huitième, onzième, quatorzième, dix-septième et dix-neuvième, comptaient treize lunaisons.

Méthon exposa publiquement à Athènes, probablement devant

la Grèce assemblée à l'occasion des jeux olympiques, une table explicative de son système, qui fut immédiatement adopté.

L'origine du cycle de Méthon fut fixée à l'instant de la nouvelle lune arrivée après le solstice d'été de l'année — 433. La découverte de Méthon fut inscrite en lettres d'or sur les monuments publics, d'où le numéro de l'année. dans le cycle, prit le nom de *Nombre d'or*.

Méthon avait élevé sur la place publique d'Athènes un gnomon pour l'observation des solstices.

Il avait eu pour maître Phainus et eut pour associé dans ses travaux Euctémon. Ces deux derniers astronomes ne nous sont pas connus autrement, mais nous devions au moins mentionner leurs noms.

En réalité, dix-neuf années tropiques font $6939^j, 60$ et deux-cent trente-cinq lunaisons comprennent $6939^j, 69$; la différence est donc de $0^j, 09$ seulement. Mais nous ne voulons pas dire que Méthon en sut positivement quelque chose.

Pour corriger l'erreur, s'il y en avait une, on faisait commencer la vingtième année à la néoménie qui suivait le solstice d'été.

HIPPOCRATE.

(Né dans l'île de Cos vers — 460, mort à Larisse vers — 380.)

Il appartenait à une famille vouée depuis longtemps de père en fils à la pratique de la Médecine, et qui avait eu des représentants dans presque toutes les villes importantes de la Grèce et de l'Asie Mineure.

Son père, Héraclide, était lui-même un médecin recherché.

Hippocrate vint prendre à Athènes les leçons d'Hérodicus, et visita d'autres villes pour s'y perfectionner dans son art; il paraît avoir été lié avec Démocrite d'Abdère, qui était médecin lui-même.

La Médecine, comme étant, de toutes les sciences, la plus compliquée, a naturellement été vouée d'abord aux hypothèses.

« L'ancienne Médecine, dit Hippocrate, admettait l'existence de quatre qualités, le chaud, le froid, le sec et l'humide, dont la prédominence partielle engendrait toutes les maladies. »

Hippocrate s'élève contre cette hypothèse et rejette d'avance toutes celles qu'on pourrait y substituer. « La Médecine, dit-il, est basée sur des faits positifs, desquels il faut partir, de préférence à toute supposition; » il la ramène principalement à ce qu'on a depuis appelé l'*hygiène*.

Cela n'empêcha pas cependant qu'il se fit une certaine théorie, nécessairement fausse.

Il existe un grand nombre d'éditions des ouvrages d'Hippocrate qui nous sont parvenus; la meilleure est celle de M. Littré, en huit volumes, qui ont paru de 1839 à 1849.

HIPPOCRATE DE CHIOS.

(Né vers — 450.)

Écrivit des éléments de Géométrie; il est surtout connu pour la quadrature de ses lunules.

C'est lui qui le premier ramena le problème de la duplication du cube à celui de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs données.

CLÉOSTRATE.

(Né vers — 450.)

Il passe pour l'inventeur d'un cycle de huit ans. Pline lui attribue la division du zodiaque en signes, mais il est probable que cette division était déjà depuis longtemps en usage. La grande compilation de Pline fourmille d'inexactitudes souvent absurdes.

ZÉNODORE.

(— 450.)

Il est l'auteur du plus ancien ouvrage de Géométrie qui nous soit parvenu. Cet ouvrage a été conservé par Théon d'Alexandrie, dans son Commentaire sur la syntaxe de Ptolémée. Zénodore s'y proposait de renverser l'opinion alors commune, que des contours égaux enfermaient des surfaces égales.

PHILOLAÜS.

(Né à Crotone ou à Tarente vers — 450, mort à Héraclée.)

Disciple d'Arétas et successeur de Pythagore dans la direction de l'école, à Tarente.

Chassé probablement de Tarente lors d'une nouvelle dispersion de l'école pythagoricienne, il vint s'établir à Thèbes, en Béotie, et y rassembla les débris de l'école de Sybaris.

C'est le premier Pythagoricien qui ait laissé des écrits; mais ses ouvrages, dont le plus important serait son *Système du*

monde, ne nous sont connus que par quelques fragments. On a lieu de croire, du reste, que Philolaüs ne se borna pas à enseigner les doctrines du maître, mais les modifia assez profondément.

Nous passons sur les idées chimériques d'une sorte de pouvoir des nombres, qui gouverneraient l'univers, idées qui peuvent avoir été émises par Pythagore.

Il est indubitable, par les objections que fait Aristote à son système, que Philolaüs enseignait que la Terre tourne sur elle-même trois cent soixante-cinq fois et demie dans une année, qu'elle emploie à tourner autour du Soleil; que les planètes tournent de même autour du Soleil (seulement il en comptait un peu plus qu'il n'y en avait de visibles de son temps, probablement par une raison tirée de la puissance des nombres).

Un certain groupe de ses idées philosophiques était fondé sur l'existence des cinq polyèdres réguliers et l'impossibilité qu'il y en eût davantage. L'important est que nous savons par là que ces polyèdres réguliers étaient déjà connus dans l'école pythagoricienne.

Il est remarquable que ces mêmes polyèdres réguliers enflammèrent aussi le génie de Kepler, qui n'y renonça que lorsqu'il eut trouvé mieux.

Philolaüs croyait, comme Pythagore, à la métempsycose.

ARCHYTAS.

(Né à Tarente vers — 410, mort vers — 380.)

Disciple de Philolaüs, il vint à Athènes pour y suivre les leçons de Platon, dont il devint l'ami; on lui attribue l'invention de la vis et de la poulie.

Il est le premier qui ait donné une solution du problème de la duplication du cube ; mais il y employait un cylindre et non pas seulement des courbes planes.

PLATON, ARISTOCLÈS, DESCENDANTS DE CODRUS.

(Né en — 430, mort en — 347.)

Il suivit pendant huit années les leçons de Socrate et publia même ses premiers dialogues du vivant de son maître.

Lorsque Anytus porta son accusation contre Socrate, Platon monta à la tribune et essaya de défendre son maître. Les clameurs du peuple étouffèrent sa voix. Le discours qu'il voulait prononcer est devenu l'*Apologie de Socrate*.

Après la mort du maître, Platon, indigné, quitta Athènes. Il se rendit d'abord à Mégare, où il suivit les leçons d'Euclide le rhéteur, et de là en Italie, où il s'instruisit dans la doctrine de Pythagore par la fréquentation d'Archytas de Tarente, qu'il devait plus tard attirer à Athènes, de Philolaüs d'Héraclée, d'Eurytas de Métaponte et de Timée de Locres. Il séjourna ensuite à Cyrène, où il étudia la Géométrie avec l'aide de Théodore, puis il visita l'Égypte pour y apprendre l'Astronomie.

De retour à Athènes, vers — 380, il y ouvrit, dans les jardins d'Academus, son école qui a pris de là le nom d'Académie. Tout ce que la Grèce renfermait d'esprits distingués suivait ses leçons, et plusieurs villes lui demandèrent des lois. Au reste, il refusa toujours toute participation aux affaires publiques.

Malgré les soucis que lui donnait la direction de son école, il se rendit trois fois en Sicile : la première fois en — 370, pour essayer

de faire honte à Denys l'Ancien de ses procédés de gouvernement; mais Denys le fit vendre comme esclave et il ne put retourner à Athènes que racheté par ses amis; la seconde fois en — 368, appelé par Denys le Jeune, à qui il tenta d'inspirer le goût de la sagesse; la troisième en — 361, pour tâcher d'obtenir le rappel de Dion qui avait été banni. Cette troisième fois il n'échappa qu'avec peine à la prison.

A sa mort, il laissa la direction de l'Académie à son neveu Speusippe, à qui l'on attribue un *Traité des nombres.*

Platon n'a laissé aucun ouvrage relatif à la Géométrie, mais il rendit de grands services à cette science en dirigeant les efforts de ses disciples vers l'étude des sections coniques, qu'il paraît avoir considérées le premier; en définissant et en développant dans ses leçons la méthode de recherche qui consiste à supposer résolue la question que l'on traite et à suivre le fil des déductions qui se présentent alors à l'esprit, au lieu de se borner à la recherche plus difficile des inductions que peut suggérer l'énoncé; enfin en imaginant, dans divers buts, notamment pour la solution des problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle, des lieux géométriques définis, engendrés par le mouvement de points liés à des appareils mobiles suivant certaines lois.

HÉLICON DE CYZIQUE.

(Disciple de Platon.)

Annonça à Denys, tyran de Syracuse, une éclipse de Soleil. Denys lui fit donner pour récompense un talent d'or. Cette éclipse est probablement celle de — 401.

EUDOXE DE CNIDE.

(Né à Cnide vers — 409, mort en Égypte vers — 356.)

Suivant Diogène Laërce, il était versé dans toutes les sciences. Il apprit la Géométrie sous Archytas, la Médecine sous Philistion, la Philosophie à l'école de Platon et l'Astronomie en Égypte.

Il fonda une école dans sa ville natale, qu'il enrichit d'un observatoire astronomique et à laquelle il donna des lois. Il mourut dans un nouveau voyage en Égypte.

Il ne reste rien de ses ouvrages, si ce n'est quelques titres. Ce que l'on en connaît se trouve dans le commentaire d'Hipparque sur les *Phénomènes* d'Aratus, qui avait mis en vers les théories d'Eudoxe.

On pense que c'est lui qui inventa le cadran solaire horizontal.

Il ne se servait encore ni des coordonnées équatoriales, ni à plus forte raison des coordonnées écliptiques. Il indiquait les positions occupées par les astres mobiles en les rapportant aux constellations.

Philolaüs avait déjà imaginé des sphères mobiles auxquelles étaient attachées les étoiles, les planètes, ainsi que le Soleil et la Lune. Eudoxe reprit l'hypothèse de Philolaüs et la développa. Il imagina pour chaque astre des sphères emboîtées les unes dans les autres, dont chacune participait aux mouvements des sphères enveloppantes, la plus petite ayant d'ailleurs son mouvement propre. Vingt-sept sphères lui suffirent pour l'ensemble de tous les astres : une pour les étoiles, trois pour le Soleil, trois pour la Lune et quatre pour chacune des cinq planètes.

Eudoxe corrigea avec bonheur la durée de l'année, trouvée par Méthon ; il lui attribuait 365 jours et 6 heures.

Il n'était pas au reste moins bon géomètre que bon astronome. Nous en trouvons la preuve dans la lettre qu'Archimède adressait à Dosithée en lui envoyant son *Traité de la Sphère et du Cylindre :* « Quoique ces propriétés (qu'il va établir) existassent, dit-il, dans les figures dont il vient de parler, elles n'avaient point été remarquées par ceux qui avaient cultivé la Géométrie avant lui. Il en a été de même de plusieurs choses qu'Eudoxe a considérées dans les solides et qui ont été admises, comme les théorèmes suivants : *Une pyramide est le tiers d'un prisme qui a la même base et la même hauteur que la pyramide ; un cône est le tiers d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que le cône.*

Ces propositions existaient essentiellement dans ces figures, et quoique avant Eudoxe il eût paru plusieurs géomètres qui n'étaient point à mépriser, cependant ces propriétés leur étaient inconnues et ne furent découvertes par aucun d'eux. »

Archimède veut dire par là que, quoique les propositions qu'il va énoncer soient nouvelles, ce n'est pas une raison pour les rejeter sans examen (il paraît que le culte du vieux existait déjà de son temps), et il le prouve par l'exemple d'Eudoxe.

Il est heureux au reste que la modestie d'Archimède lui ait suggéré l'idée de cet exemple, car nous ne saurions pas autrement qu'Eudoxe fût allé aussi loin en Géométrie, et c'est un point fort important dans l'histoire de la Science.

Eudoxe avait donné du problème des deux moyennes proportionnelles une solution qu'Ératosthène trouvait excellente, mais qui ne nous est pas parvenue.

ARISTOTE.

[Né à Stagire (Macédoine) en — 384, mort à Chalcis en — 322.]

Son père était médecin. Resté orphelin à dix-sept ans, il fut adopté par une famille amie. Il vint de bonne heure à Athènes et entra dans l'école de Platon, dont il suivit les cours pendant vingt ans. Il se sépara de son maître avec regret, mais en se disant : *Amicus Plato, sed magis amica veritas.*

A la mort de Platon (—347), il se rendit en Mysie, près d'Hermias, dont il épousa la sœur, puis accepta de Philippe les fonctions de précepteur d'Alexandre, dans lesquelles il passa douze années.

En — 335 il revint se fixer à Athènes et y fonda l'école péripatéticienne. C'est là qu'il composa la plupart de ses ouvrages.

Ceux qui se rapportent aux sciences sont : l'*Histoire des animaux* en dix livres; un recueil de problèmes relatifs à la Physique et quelques traités sur la Mécanique et la Géométrie.

On trouve dans les *Questions mécaniques* cet énoncé remarquable : les chocs de deux corps produisent le même effet si ces corps sont inversement proportionnels à leurs vitesses.

Aristote paraît avoir soupçonné la pesanteur de l'air; il indique le refroidissement de l'atmosphère comme étant la cause du phénomène de la rosée; il démontrait la sphéricité de la Terre par la rondeur de l'ombre portée par elle sur la Lune, lors de ses éclipses.

Mais il compliqua encore l'enchevêtrement des sphères imaginées par Philolaüs, Eudoxe et Calippe, en en portant le nombre à cinquante-six.

MÉNECHME.

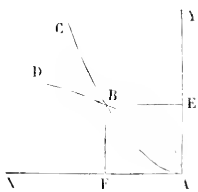
(Né vers — 375.)

Ami et disciple de Platon, il s'occupa particulièrement de la théorie élémentaire des coniques, et l'avança assez pour que ces courbes aient pris dans l'antiquité le nom de *courbes de Ménechme.*

Il donna deux solutions du problème de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs données : la première par l'intersection de deux paraboles, la seconde par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole. Nous croyons devoir rapporter ces deux solutions.

Soient (*fig.* 1) les deux paraboles ABC, ABD ayant leurs axes rectangulaires dirigés suivant AX et AY ; pour sommet commun

Fig. 1.



le point A et pour paramètres p et q : menons du point où elles se coupent des perpendiculaires aux axes BE et BF.

BE sera moyenne proportionnelle entre p et AE ; de même BF sera moyenne proportionnelle entre q et AF.

Ainsi on aura

$$p : \mathrm{BE} :: \mathrm{BE} : \mathrm{EA} \quad \text{et} \quad q : \mathrm{BF} :: \mathrm{BF} : \mathrm{FA}.$$

Mais, en remplaçant dans la seconde proportion FA par BE et BF par EA, puis renversant les rapports, cette seconde proportion deviendra

$$\mathrm{BE} : \mathrm{EA} :: \mathrm{EA} : q\,;$$

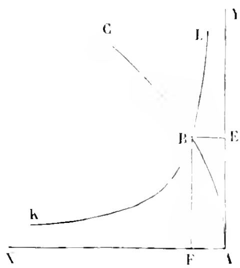
on aura donc la proportion continue

$$p : \mathrm{BE} :: \mathrm{BE} : \mathrm{EA} :: \mathrm{EA} : q.$$

BE et EA sont donc deux moyennes proportionnelles entre p et q. De sorte que, pour obtenir les deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs M et N, il suffira de prendre ces deux longueurs pour les paramètres des deux paraboles.

Soient, en second lieu, la parabole ABC (*fig.* 2) ayant pour axe AX, pour sommet le point A et pour paramètre p, puis l'hy-

Fig. 2.



perbole équilatère KBL ayant pour asymptotes AX, AY et pour demi-axe transverse q'.

On aura comme précédemment

$$p : \mathrm{BF} :: \mathrm{BF} : \mathrm{FA},$$

et, à cause de la propriété principale de l'hyperbole entre ses asymptotes,

$$\mathrm{BE} : q' :: q' : \mathrm{BF}.$$

Cela posé, si l'on construit la ligne q telle que le rectangle compris sous les côtés p et q soit égal au carré construit sur q', on pourra remplacer les deux moyennes q' de la seconde proportion par p et q ; on aura donc

$$\mathrm{BE} : q :: p : \mathrm{BF} ;$$

d'où

$$p : \mathrm{BF} :: \mathrm{BF} : \mathrm{BE} :: \mathrm{BE} : q.$$

Ainsi BF et BE seront deux moyennes proportionnelles entre p et q. De là résulte la construction : on prend la première ligne donnée pour paramètre de la parabole et la moyenne proportionnelle entre les deux lignes données pour demi-axe transverse de l'hyperbole.

DINOSTRATE.

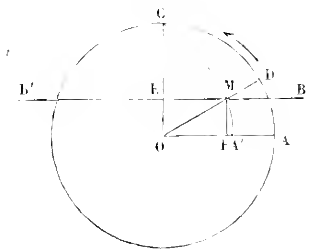
(Né vers — 370.)

Elève de Platon et frère de Ménechme. Il imagina pour la quadrature du cercle une courbe qu'on a, pour cette raison, appelée quadratrice et qui porte son nom, bien que Proclus paraisse en attribuer l'invention à Hippias.

Voici la génération de cette courbe. Supposons qu'un rayon OA du cercle O (*fig.* 3) tourne uniformément autour du centre, dans le sens indiqué par la flèche ; qu'en même temps une parallèle BB' à la direction initiale du rayon OA se meuve paral-

lèlement à elle-même d'un mouvement aussi uniforme, et enfin que le rayon OA mette le même temps à décrire le quadrant AC

Fig. 3.



que la droite BB′ en met à parcourir la longueur du rayon OC : le point de rencontre M du rayon mobile et de la droite mobile décrira la quadratrice.

Soient, à un instant quelconque, AD l'arc parcouru par l'extrémité du rayon mobile, et OE la portion du rayon OC parcourue par la droite mobile : AD et OE seront entre eux comme le quadrant est au rayon. Donc, si l'on veut diviser le quadrant en parties proportionnelles à des longueurs données, il suffira de partager le rayon OC en parties proportionnelles à ces longueurs, de mener par les points de division les parallèles à OA, et de joindre au centre les points de rencontre de ces parallèles avec la quadratrice CA′, supposée construite.

Il n'y avait donc d'autre difficulté que de construire la quadratrice CA′. Mais c'était bien assez.

Il est facile de voir que OA′ devait être une troisième proportionnelle au quadrant et à OA. De sorte qu'il eût fallu connaître le quadrant pour construire OA′ destiné à faire connaître le quadrant.

THÉOPHRASTE.

(Né dans l'île de Lesbos en — 371, mort en — 204.)

Ami, disciple et successeur d'Aristote dans la direction du Lycée. Il s'appelait Tyrtame; son éloquence lui fit donner par ses auditeurs le nom de Théophraste (parleur divin). Il suivit d'abord les leçons d'un philosophe appelé Alcippe ou Leucippe, à Éresos, sa ville natale, puis se rendit à Athènes, où il eut pour maître Platon, et pour condisciple Aristote.

Après la mort de Platon, il parcourut la Grèce, contribua à délivrer Lesbos des tyrans qui l'opprimaient, passa ensuite en Macédoine, puis revint à Athènes après la bataille de Chéronée. Aristote ayant ouvert à cette époque son école dans le Lycée, Théophraste devint un des auditeurs les plus assidus de son ancien condisciple et lui succéda, en — 322, dans la direction de cette école, où il compta bientôt deux mille auditeurs.

Par son éloquence, par l'aménité de ses manières, par son caractère, il sut se concilier la bienveillance du peuple athénien, aussi bien que l'amitié des rois de Macédoine et d'Égypte.

Exilé un instant d'Athènes avec tous les autres philosophes, sur la proposition de Sophocle (—316), il y fut bientôt après rappelé, et, depuis ce moment, il ne fut plus inquiété. « Tout en adoptant les principes des péripatéticiens, dit M. Thiébaud de Berneaud, Théophraste voulait marier ensemble la morale de Socrate et le style nombreux de Platon. Il donna un nouveau lustre à l'école et amena ceux qui la suivaient à bien observer la nature, à vivre en véritables philosophes et en bons citoyens. On le voyait sans cesse s'élever contre les prétentions audacieuses des oligarchies,

contre les fureurs des démagogues, contre les délateurs, enfin attaquer ouvertement tous les préjugés et poursuivre la corruption de son siècle. »

En philosophie, Théophraste s'attacha particulièrement à compléter, à interpréter les idées d'Aristote, pour qui il professait une profonde admiration, et s'il modifia parfois les doctrines de ce dernier, ce fut pour les rendre plus intelligibles. Son savoir immense embrassa toutes les connaissances de son temps. Diogène Laërce nous a conservé les titres de deux cent vingt-neuf traités écrits par lui sur toutes sortes de sujets; quelques-uns seulement sont parvenus jusqu'à nous. Théophraste est surtout connu par son traité des *Caractères,* dont La Bruyère s'est inspiré et qu'il a traduit.

Comme naturaliste, il a fait pour les plantes ce qu'Aristote, son maître, avait fait pour les animaux. Il classait en six divisions les cinq cents espèces qu'il connaissait. Il démontre que la division vulgaire des végétaux en herbes et en arbres est dénuée de caractère philosophique. Il décrit exactement la différence qui existe entre le bois de palmier et celui des arbres à couches concentriques.

Nous avons de lui une *Histoire des plantes* en neuf livres, un *Traité des causes de la végétation* en six livres, un *Traité des pierres*, un *Traité des signes du beau temps*, un *Traité des vents*, etc. Il avait laissé plusieurs ouvrages mathématiques, que nous ne connaissons que par les écrits de Diogène Laërce, de Théon d'Alexandrie et de Proclus; le plus important était une *Histoire de la Géométrie* en quatre livres, *De l'Astronomie* en six livres et *De l'Arithmétique* en un livre; la perte de cette histoire surtout est regrettable. L'édition princeps des *Œuvres de*

Théophraste a été donnée à Venise (1498, in-fol.); l'édition la plus estimée est celle de J.-G. Schneider : *Theophrasti Eresii quæ supersunt opera* (Leipzig, 1818-1821, 5 vol. in-8).

CALIPPE.

(Né à Cyzique vers — 350.)

Il proposa, au lieu du cycle de Méthon, une période quadruple de soixante-seize ans.

La plupart des astronomes adoptèrent cette correction.

La première période calippique commença le 28 juin de l'année — 331.

Calippe ajouta sept sphères nouvelles à celles d'Eudoxe.

EUDÈME.

(Né à Rhodes vers — 350, mort vers — 290.)

Tout ce qu'on sait de sa vie, c'est qu'il fut un des principaux disciples d'Aristote. Il écrivit plusieurs ouvrages, aujourd'hui perdus, sur des sujets traités par son maître : *Analytique*, *Physique*, *Sur les catégories*, *Sur l'interprétation*, etc. Il nous reste quelques fragments de son ouvrage sur la Physique, dans lequel il contredit souvent Aristote. Eudème avait laissé six livres sur l'histoire de la Géométrie et six autres sur celle de l'Astronomie. Ces ouvrages, qui ont été connus de Théon d'Alexandrie et de Proclus, sont malheureusement perdus.

Eudème était assez versé dans l'Astronomie pour pouvoir prédire les éclipses de Soleil. On pense que certains ouvrages d'Aristote ont été complétés par son disciple Eudème, et que nous ne les avons pas tels que le maître les avait écrits ; de ce nombre sont les *Metaphysica*, laissés inachevés par Aristote, et les *Ethica*.

AUTOLYCUS.

(Né à Pristane, Asie Mineure, vers — 340.)

A laissé deux traités : *De la sphère en mouvement* et *Des levers et des couchers des astres*, dont il existe une traduction latine, mais qui ne contiennent que les premiers éléments de la Cosmographie.

PYTHÉAS.

(Né vers — 330 à Marseille.)

Il avait écrit deux ouvrages : *Description de l'Océan* et *Voyage autour de la Terre*, dont il ne reste que des extraits dans quelques auteurs anciens. On suppose qu'il serait allé jusqu'en Islande. On dit qu'il soupçonna la relation qui existe entre le phénomène des marées et le mouvement de la Lune.

D'après Ératosthène, il aurait établi un gnomon à Marseille, et aurait trouvé, pour l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, 23°49'.

CONON DE SAMOS.

(Né vers — 320.)

Archimède fut son ami et peut-être son disciple. C'est à lui qu'il adressa ses premiers essais. Conon était astronome et géomètre; mais aucun de ses ouvrages ne nous est parvenu. Ptolémée cite quelques-unes de ses observations.

Voici ce qu'en dit Archimède dans sa lettre d'envoi à Dosithée, du *Traité de la sphère et du cylindre :*

« Il eût été à désirer que nos découvertes eussent été publiées du vivant de Conon, car je pense qu'il était très capable d'en prendre connaissance et d'en porter un juste jugement. »

Il revient sur ces regrets dans sa lettre d'envoi au même Dosithée du *Traité des hélices :* « Conon mourut sans avoir eu le temps de trouver ces démonstrations (les démonstrations de théorèmes dont Archimède n'avait envoyé à Conon que les énoncés) et a laissé ces théorèmes dans leur obscurité. S'il eût vécu, il les eût trouvés sans doute, et par ces découvertes et par plusieurs autres il eût reculé les bornes de la Géométrie, car nous n'ignorons pas que cet homme avait une capacité et une industrie admirables dans cette science. »

ARATUS.

(Né en Cilicie vers — 320, mort vers — 280.)

Il vivait à la cour de Ptolémée Philadelphe et fut ensuite appelé en Macédoine par Antigone Gonatas. Il a laissé, sous le titre de : *Les Phénomènes*, un poème qui a eu le singulier bonheur

de parvenir jusqu'à nous, d'avoir été commenté par Ératosthène et par Hipparque, d'avoir fait l'admiration des Grecs et des Romains, d'avoir été traduit en parties par Cicéron, César et Ovide, en vers latins; d'avoir, enfin, été réimprimé un grand nombre de fois depuis la Renaissance, sans contenir autre chose qu'un tableau fort succinct des notions tout à fait élémentaires qu'on pouvait avoir, à l'époque où vivait l'auteur, sur la Terre, le Soleil, la Lune et les planètes.

L'abbé Halma en a donné une traduction française en 1823.

TIMOCHARIS.

(Né à Alexandrie vers — 320, mort vers — 260.)

C'est l'un des premiers astronomes qui aient rapporté les étoiles à l'écliptique; il en dressa un catalogue qui lui coûta vingt-six ans de travail et qui fut d'un grand secours à Hipparque et à Ptolémée. Il est, du reste, probable que, s'il savait passer des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques, c'était par des constructions graphiques ou par des mesures sur le globe.

EUCLIDE.

(Né vers — 315, mort vers — 255.)

On a peu de détails sur sa vie; on sait seulement qu'après s'être formé à l'école de Platon il fut appelé par Ptolémée, fils de Lagus, à Alexandrie, et qu'il y ouvrit une école de Mathéma-

tiques. Les *Éléments de Géométrie* et les *Données* d'Euclide nous sont parvenus, ainsi que des traités d'Optique et de Catoptrique, et un opuscule sur la division des polygones; les autres ouvrages, savoir : quatre livres sur les *Sections coniques*, deux sur les *Lieux à la surface*, et trois sur les *Porismes*, sont totalement perdus. Les meilleures éditions des ouvrages d'Euclide sont : *Euclidis opera cum Theonis expositione*, en grec (Bâle, 1550); *Euclidis quæ supersunt omnia*, en grec et en latin (Oxford, 1703); enfin, les *Œuvres d'Euclide*, en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très ancien découvert par F. Peyrard, bibliothécaire à l'École Polytechnique (Paris, 1814).

Un grand nombre de géomètres grecs avaient donné, avant Euclide, des éléments de Géométrie. Proclus cite, entre autres, Hippocrate de Chio, Léon, Theudius de Magnésie, Hermotime de Colophon, Eudoxe et Thætète. « Euclide, dit Proclus, mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe, perfectionna ce qui avait été commencé par Thætète et démontra plus rigoureusement ce qui avait été trop mollement démontré avant lui. »

Les *Éléments* sont divisés en treize livres, auxquels on en joint ordinairement deux autres sur les cinq polyèdres réguliers, que l'on attribue à Hypsiclès, géomètre d'Alexandrie, postérieur de cent cinquante ans à Euclide.

« Pour se former, dit Lacroix, une idée de l'ouvrage entier, on pourrait le considérer comme composé de quatre parties. La première comprendrait les six premiers livres et se diviserait en trois sections, savoir : la démonstration des propriétés des figures planes, traitée d'une manière absolue et comprise dans les livres I, II, III, IV; la théorie des proportions des grandeurs en général, objet du livre V, et l'application de cette théorie aux

figures planes. La seconde partie renfermerait les livres VII, VIII et IX, qu'on désigne par l'épithète *d'arithmétiques*, parce qu'ils traitent des propriétés générales des nombres. La troisième partie serait formée du livre X seulement, où l'auteur considère en détail les grandeurs incommensurables. La quatrième partie, enfin, se composerait des cinq derniers livres, qui traitent des plans et des solides. »

L'ordre admirable qui y règne, ainsi que la force et la clarté des démonstrations, a imposé les *Éléments* d'Euclide comme guide obligatoire dans toutes les écoles, presque jusqu'à nos jours, et au delà du temps pendant lequel ils pouvaient rendre de bons services; car l'impossibilité de s'en passer paraissait telle, qu'on préférait les corriger, souvent de la façon la plus choquante, plutôt que d'y renoncer. On y intercalait maladroitement les formules toutes modernes des mesures des surfaces et des volumes, dont les Grecs n'avaient pas même eu l'idée, et on supprimait les admirables livres relatifs aux rapports des grandeurs concrètes, pour les remplacer par l'inutile et incomplète théorie des proportions entre nombres commensurables, qui n'apprend rien autre que celle des fractions ordinaires.

Les *Données* d'Euclide forment aux *Éléments* une sorte d'appendice destiné à en faciliter les usages et les applications. Euclide appelle *donnée* ce qui peut résulter des constructions connues. Par exemple, « si d'un point donné on mène une droite qui touche un cercle donné de position, la droite est donnée de position et de grandeur. » « Les propositions des *Données*, dit M. Chasles, étaient toujours citées, comme celles des *Éléments*, par les géomètres anciens et par ceux du moyen âge, dans toutes leurs recherches géométriques; Newton même

en fait usage dans ses *Principes*, ainsi que des coniques d'Apollonius ; mais, depuis, ces traces de l'antiquité ont disparu des écrits des géomètres, et le livre des *Données* n'est plus guère connu que de ceux qui étudient l'histoire de la Science. » M. Chasles ajoute que « l'on peut déduire aisément la résolution des équations du second degré de quelques propositions du livre des *Données*, et il cite la 85[e] : *Si deux droites comprennent un espace donné dans un angle donné, et si leur somme est donnée, chacune d'elles sera donnée.* » Il nous semble que le fait est indiscutable. Si Euclide, Archimède, Apollonius n'ont pas expressément employé les formules des racines des équations du second degré, c'est que, spéculant toujours sur les grandeurs elles-mêmes et non pas sur leurs mesures, ils n'avaient pas besoin des formules de ces mesures; mais les constructions des problèmes qui ont pour objet soit la division d'une droite en moyenne et extrême raison, soit la recherche d'un rectangle équivalant à un carré donné, dont les côtés fassent une somme donnée ou aient entre eux une différence donnée, ces constructions fournissent une image tellement saisissante des formules des racines des équations du second degré, qu'il eût été impossible de ne pas les apercevoir si la question de ces racines avait seulement été posée.

Euclide avait considérablement augmenté la théorie des sections coniques.

Montucla avait vu, dans les *Lieux à la surface* d'Euclide, des surfaces ou des courbes à double courbure. M. Chasles pense que c'étaient les surfaces qu'engendrent les sections coniques en tournant autour de leurs axes, et qu'Archimède nomme *sphéroïdes* ou *conoïdes*, suivant qu'elles sont fermées ou illimitées.

L'ouvrage des *Lieux à la surface* aurait eu pour objet l'étude des sections planes des surfaces de révolution du second degré.

Les *Porismes* d'Euclide ne sont connus que par quelques mots de Proclus et de Pappus : ce dernier, dans sa préface du VII^e livre des *Collections mathématiques*, dit que le *Traité des Porismes* était éminemment utile pour la résolution des problèmes les plus compliqués ; il l'appelle : *Collectio artificiosissima multarum rerum, quæ spectant ad analysin difficiliorum et generalium problematum.* Le genre de propositions que contenait cet ouvrage n'est pas même bien déterminé, quoique beaucoup de géomètres en aient tenté la divination, notamment Robert Simpson et M. Chasles.

D'après ces deux géomètres, les porismes d'Euclide (car on trouve dans beaucoup d'auteurs grecs, notamment dans Apollonius, des propositions appelées *porismes*), auraient été des théorèmes servant à passer d'une définition connue d'un lieu géométrique à une autre définition du même lieu, et, plus généralement, à passer des conditions connues qui déterminent un système de choses variables, à d'autres conditions équivalentes.

M. Chasles a proposé du *Traité des porismes* une restitution d'après laquelle l'ouvrage d'Euclide aurait contenu le germe des théories homographique, d'involution, etc. La nature des lemmes établis par Pappus relativement aux porismes a paru en effet à de bons géomètres s'accorder avec cette manière de voir.

Il nous reste, pour compléter ce que nous venons de dire d'Euclide, à tirer de ses ouvrages les documents qu'ils fournissent en abondance à l'histoire de la formation des idées mathématiques.

Mais nous devons d'abord avertir que les citations que nous allons faire se rapportent à l'édition en français de l'*Euclide* de

Peyrard, qui a paru en 1804. Cette édition ne contient ni le livre XIII, qui traite des polyèdres réguliers, ni les livres VII, VIII, IX et X, qui avaient rapport aux proportions entre grandeurs et aux rapports numériques. Les six premiers livres, le onzième et le douzième, que contient cette édition, n'ont absolument trait qu'à la Géométrie. Il faut croire que le cinquième et le sixième livre portaient d'autres numéros dans l'édition que Lacroix avait sous les yeux lorsqu'il écrivait ce que nous avons rapporté plus haut.

Le livre II contient une série de propositions très remarquables, dont nous ne pouvons citer textuellement les énoncés à cause de leur longueur, mais dont la traduction en langage moderne suffira, parce qu'il sera facile de restituer mentalement le texte vrai.

Il s'agit de propositions concernant des égalités entre des sommes de rectangles et de carrés; et, bien entendu, c'est sur les figures elles-mêmes, et par des déplacements de parties qu'Euclide démontre ces propositions; en voici la liste :

Proposition III : $(a+b)b = ab + b^2$.
Proposition IV : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Proposition V : $(a+h)(a-h) + h^2 = a^2$.
Proposition VI : $(2a+h)h + a^2 = (a+h)^2$.
Proposition VII : $(a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2$.
Proposition VIII : $4(a+b)a + b^2 = (2a+b)^2$.
Proposition IX : $(a+h)^2 + (a-h)^2 = 2a^2 + 2h^2$.
Proposition X : $(2a+h)^2 + h^2 = 2a^2 + 2(a+h)^2$.

Ce sont, nous le répétons, des propositions de Géométrie pure, sans aucun mélange d'idée de calcul numérique ni algébrique,

parce que les longueurs droites considérées pourraient n'être pas toutes commensurables entre elles, de sorte que certaines d'entre elles pourraient n'être pas capables de représentation numérique.

On ne peut douter qu'Euclide sut parfaitement que, si, au lieu de longueurs concrètes, on avait considéré des grandeurs exprimées en pas géométriques par exemple, ou en cent vingt-cinquièmes du stade, chacune de ses propositions aurait pu recevoir un énoncé arithmétique correspondant; tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il ne s'en occupe pas.

Mais quand les arithméticiens vont fleurir, ils s'empareront des propositions d'Euclide, et ils démontreront, au moyen des figures mêmes d'Euclide, que, par exemple, le carré de la somme de deux nombres se compose de la somme des carrés de ces deux nombres et de deux fois leur produit; que le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés de ces nombres, etc.

Ainsi nous verrons naître une sorte d'application de la Géométrie à l'Algèbre, longtemps avant la révolution qui donna naissance à l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

Aussi croyons-nous pouvoir dire que toute l'Algèbre ancienne a été fondée par les géomètres.

L'Algèbre est la théorie abstraite des relations de dépendance des grandeurs; elle suppose la connaissance des règles de calcul qui permettent de substituer une formule à une autre.

Or, il ressort clairement de l'étude des anciens que les géomètres ont constitué à eux seuls toute l'Algèbre ancienne, dans l'une et l'autre de ses deux parties : la théorie des relations de dépendance et la théorie du calcul algébrique proprement dit.

Voici d'autres énoncés tout aussi remarquables, sous des rapports analogues :

LIVRE III.

Proposition XXXV.— Si, dans un cercle, deux cordes se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une de ces cordes est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre.

LIVRE VI.

Proposition XVI. — Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les droites extrêmes est égal au rectangle compris sous les droites moyennes.

Proposition XVII. — Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les droites extrêmes est égal au carré construit sur la droite moyenne.

Proposition XIX. — Les triangles semblables sont entre eux en raison doublée des côtés homologues.

LIVRE XI.

Proposition XXXIII. — Les parallélépipèdes semblables sont entre eux en raison triplée de leurs côtés homologues.

Proposition XXXVI. — Si trois droites sont proportionnelles de manière que A soit à B comme B est à C, le parallélépipède équilatéral construit sur B sera égal au parallélépipède construit sur A, B et C, avec les mêmes angles.

LIVRE XII.

Proposition XVIII. — Les sphères sont entre elles en raison triplée de leurs diamètres.

BION (D'ABDÈRE).

(Né vers — 300.)

Diogène Laërce rapporte que Bion annonçait que dans certaines régions il y a six mois de nuit et six mois de jour. Strabon l'appelle *astrologue.*

HÉLIODORE DE LARISSE.

(Né vers — 280.)

Il ne nous est connu que par un court traité d'Optique, principalement emprunté à celui d'Euclide. Cet ouvrage a été imprimé pour la première fois avec celui d'Euclide par Ignatius Dante, à Florence, en 1573.

PERSÉE, DIT DE CITTIUM.

(Né vers — 290, mort à Corinthe en — 244.)

Disciple de Zénon et philosophe d'Antigone Gonatas, roi de Macédoine. C'est lui qui inventa les spiriques, sections planes du tore, qui ont occupé les anciens pendant un certain temps.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES CONIQUES.

Le grand nom d'Apollonius de Perge a tellement éclipsé ceux de ses prédécesseurs dans l'étude des sections coniques, que tous leurs ouvrages ont disparu, notamment celui d'Aristée, qui en avait écrit cinq livres.

On ne sait pour ainsi dire rien des travaux personnels des géomètres de l'école de Platon, ni de ceux des géomètres de l'école d'Alexandrie dans cette nouvelle branche de la Géométrie.

Mais Apollonius ayant eu la probité de séparer, dans son *Traité des coniques,* ce qui était connu avant lui de ce qui lui est dû, nous pouvons du moins restituer en bloc à tous les géomètres dont nous venons de parler ce qu'ils ont découvert séparément.

Ces géomètres sont, d'abord, Ménechme et, sans doute, son frère Dinostrate, Archytas de Tarente, Laodamas de Thase, Thætètes d'Athènes, Amyclas d'Héraclée, Néoclides et Léon son élève, Eudoxe de Cnide, Theudius de Magnésie, Athénée de Cyzique, Philosophus, Hermotime de Colophon, Philippe de Medmée et Philippe d'Opuntium, Cratistus, Aristée, Eudemus

de Pergame, Attalus, Naucrates, Conon et Trasidée son ami. Euclide, Nicotèle, Ératosthène et, peut-être, Aristarque de Samos.

Apollonius dit dans sa lettre d'envoi du premier livre des *Coniques* à Eudemus : Des huit livres, les quatre premiers contiennent les éléments de la théorie. Le premier embrasse la génération des trois sections coniques et leurs principales formes; mais les propositions y sont présentées d'une manière plus complète et plus générale qu'elles ne l'avaient été par ceux qui avaient écrit avant nous. Le deuxième traite des diamètres et des axes des sections, ainsi que des asymptotes rectilignes. Le troisième contient un grand nombre de théorèmes admirables, dont plusieurs sont nouveaux, qui serviront soit à la construction des lieux solides, soit à la détermination (de grandeurs). Nous avons reconnu, en les élaborant, qu'Euclide n'avait pas établi la manière de former le lieu à trois et quatre lignes (c'est le lieu des points tels que le rectangle compris sous les distances de l'un de ces points à deux droites données, soit en raison donnée avec le rectangle compris sous une droite donnée et sous la distance du même point à la troisième droite donnée; ou le lieu des points tels que le rectangle compris sous les distances d'un de ces points à deux droites données, soit en raison donnée avec le rectangle compris sous les distances du même point à deux autres droites données), si ce n'est dans un cas particulier et encore d'une façon peu heureuse. Au reste, ce n'était pas possible indépendamment de ce qui a été trouvé par nous. Le quatrième livre traite des intersections des sections coniques entre elles et avec la circonférence et de beaucoup d'autres choses dont aucune n'avait été mise en lumière par ceux qui ont existé avant nous.

Les quatre derniers livres touchent à la plus haute science. Le cinquième est consacré en grande partie aux maximums et aux minimums; le sixième, à la similitude entre les sections coniques; le septième contient les théorèmes qui fournissent les moyens de déterminer (les grandeurs inconnues); le huitième, des problèmes déterminés.

Les commentaires de Proclus et d'Eutocius permettent d'ailleurs de préciser encore mieux les propositions connues avant Apollonius.

Voici, croyons-nous, ce qu'on peut attribuer à ses prédécesseurs.

Les sections coniques ont chacune un diamètre naturellement indiqué par leur définition par rapport au cône sur lequel elles se trouvent. Ce diamètre est l'intersection du plan de la courbe par le plan passant par la droite qui joint le sommet du cône au centre de la base et par le diamètre de cette base qui est perpendiculaire à la trace du plan de la section sur le plan de la base.

C'est par rapport à ce diamètre en évidence que les anciens établissent d'abord la théorie de la section, quel qu'en soit le genre. Ils n'en voient d'abord pas d'autres et n'arrivent à leur découverte que par des voies très compliquées. La constatation même de l'existence du diamètre conjugué du premier est naturellement une affaire d'importance, parce qu'il n'existe aucun moyen d'abandonner la définition de la courbe, considérée comme section conique; et que cette définition ne se prête aucunement à la découverte de ce diamètre conjugué.

Les moitiés des cordes que le diamètre divise en parties égales sont appelées *appliquées* ou *ordonnées* (*ordinatim applicatæ*, dans Apollonius), et les segments qu'elles déterminent sur le dia-

mètre, à partir de l'une de ses extrémités, sont appelées *abscisses* (parties retranchées du diamètre).

La propriété caractéristique de la courbe consiste dans la relation du carré construit sur l'ordonnée avec un rectangle ayant pour un de ses côtés l'abscisse.

C'est cette malheureuse idée de comparer le carré de l'ordonnée au diamètre à un rectangle ayant pour côtés l'abscisse et une donnée qui a tout compliqué dans la théorie des anciens.

Montucla dit qu'ils exprimaient la raison de ce carré au rectangle des segments du diamètre, déterminés par l'ordonnée et comptés des extrémités de ce diamètre; cela eût beaucoup mieux valu.

Ainsi, par exemple. le diamètre conjugué du premier se serait trouvé mis en évidence par l'égalité des rectangles compris sous des segments égaux du diamètre, comptés de ses deux extrémités dans les deux sens opposés; mais je n'ai rien trouvé de pareil dans Apollonius.

C'est par le moyen de la considération des tangentes dans leurs rapports avec le premier diamètre que les anciens parvenaient à établir l'existence de son conjugué. Ils se servaient pour cela de ces théorèmes que :

Dans la parabole, la sous-tangente est double de l'abscisse;

Et que : Dans l'ellipse ou dans l'hyperbole la distance du centre au pied de la tangente, sur le diamètre, est la troisième proportionnelle à la différence ou à la somme du demi-diamètre et de l'abscisse du point de contact et à ce demi-diamètre.

Ils parvenaient ensuite, péniblement, à la constatation de l'existence d'une infinité de diamètres.

Ils savaient que, dans la parabole, tous les diamètres sont paral-

lèles entre eux, et que dans l'ellipse et l'hyperbole ils sont conjugués deux à deux.

Dans l'ellipse, il y a même raison du carré d'un diamètre au carré de son conjugué que du carré d'une ordonnée parallèle au premier, au rectangle des segments déterminés sur l'autre par ce diamètre.

Cette même proportion, étendue à l'hyperbole, faisait connaître la longueur du diamètre non transverse conjugué d'un diamètre transverse.

Ils connaissaient les foyers des coniques et leurs propriétés par rapport aux tangentes.

Ils savaient que dans l'ellipse la somme des rayons vecteurs menés des foyers à un point de la courbe est constante et que dans l'hyperbole c'est leur différence.

Les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole peuvent s'approcher indéfiniment de la courbe, mais ne la coupent pas : ils les nommèrent asymptotes.

Ils savaient aussi que :

Les portions d'une sécante quelconque comprises entre une hyperbole et ses asymptotes sont égales, et que la tangente terminée aux asymptotes est partagée en parties égales par le point de contact;

Si d'un point de l'hyperbole on mène des parallèles aux asymptotes, terminées chacune à son point de rencontre avec l'autre asymptote, le parallélogramme compris entre les deux asymptotes et leurs deux parallèles est constant ;

Si d'un point extérieur à une ellipse on mène une tangente et une sécante, le carré construit sur la tangente est au rectangle

compris sous les deux segments de la sécante comme le carré du diamètre parallèle à la tangente est au carré du diamètre parallèle à la sécante ;

Si deux cordes se coupent dans une ellipse, le rectangle fait avec les segments d'une des cordes est au rectangle fait avec les segments de l'autre comme le carré du diamètre parallèle à la première corde est au carré du diamètre parallèle à la seconde.

DEUXIÈME PÉRIODE.

D'ARISTARQUE de Samos, né en — 310,
à HIPPARQUE, né en — 150.

Noms des savants de cette Période.

	Né en	Mort en
Aristarque de Samos........................	— 310	
Eratosthène................................	— 300	
Archimède..................................	— 287	— 212
Apollonius de Perga........................	— 247	
Ctésibius..................................	— 185	
Héron l'Ancien.............................	— 155	
Philon de Byzance..........................	— 150	

DEUXIÈME PÉRIODE.

C'est durant cette période que le calcul numérique commence à s'introduire dans les recherches théoriques, à propos de l'évaluation de certains rapports présentant un intérêt spécial dans les recherches astronomiques ; car ce n'est même pas à propos de Géométrie qu'Archimède s'est préoccupé d'obtenir une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre, mais pour pouvoir compter le nombre des grains de sable que contiendrait une sphère ayant pour rayon la distance de la Terre au Soleil; et comme il n'y voyait pas d'intérêt plus pressant, il s'est contenté de la première approximation.

Deux grandeurs de même espèce étant données en nature, les Grecs savaient depuis longtemps en chercher la plus grande commune mesure par des opérations mécaniques, lorsque ces grandeurs pouvaient s'y prêter, et en exprimer à peu près le rapport. Mais jamais, jusqu'à Aristarque de Samos et à Archimède, ils n'avaient cherché spéculativement à obtenir la raison de deux grandeurs liées l'une à l'autre par une loi un peu compliquée;

la raison même de la diagonale au côté du carré ne leur parut jamais intéressante à connaître.

Jamais ils ne songèrent, n'en ayant pas eu besoin, à diviser l'un des termes d'une raison en parties égales, ni à chercher théoriquement combien de fois l'une de ces parties serait contenue dans l'autre. L'idée ne leur en était pas venue avant Aristarque de Samos et Archimède.

Même dans Archimède et même dans son *Traité de la mesure du cercle*, les raisons ont toujours leurs termes concrets : ce sont toujours les raisons de deux longueurs, de deux surfaces ou de deux volumes.

Les Grecs transforment souvent ces raisons : ainsi ils savent parfaitement que la raison de deux carrés est la même que celle des segments de l'hypoténuse du triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit les côtés de ces carrés. Ils sauraient de même, et de plusieurs manières, ramener la raison de deux rectangles à la raison de deux lignes, etc. ; mais les termes de la raison transformée sont toujours concrets, comme ceux de la proposée.

Les expressions mêmes dont ils se servent de raison composée, de raison doublée et triplée, de raison sesquialtère, etc., montrent bien que l'idée de nombres est absolument étrangère à leurs préoccupations.

Une même raison est susceptible de recevoir une infinité de formes : si la forme *ainsi que* A *est à* B ne convient pas, on la remplace par *ainsi que* C *est à la quatrième proportionnelle à* A, B *et* C.

La raison composée des raisons de A à B et de C à D est, par exemple, celle de A à la quatrième proportionnelle à C, B et D ; si on ne la transforme pas, c'est celle du rectangle construit

sur A et C au rectangle construit sur B et D; mais les Grecs savent parfaitement lui donner toutes les formes possibles.

La raison doublée ou plutôt redoublée d'une raison est la raison composée de deux raisons égales à celle-là; deux carrés sont en raison doublée de la raison de leurs côtés; de même deux cubes sont en raison triplée de la raison de leurs côtés.

Cela veut dire que, par exemple, pour avoir la raison des carrés construits sur A et B, il faudrait prendre une longueur C arbitraire, construire la quatrième proportionnelle X à B, C et A, puis la quatrième proportionnelle Y à B, X et A; la raison de Y à C serait la raison doublée de A à B.

Plus simplement, la raison doublée de la raison de deux lignes A et B est la raison des segments de l'hypoténuse du triangle rectangle qui aurait pour côtés A et B.

La raison sesquialtère de la raison de deux lignes A et B est la raison composée de cette raison et de cette raison dédoublée; c'est la raison composée de la raison de A à B et de la raison des côtés de l'angle droit du triangle rectangle dont l'hypoténuse aurait pour segments A et B.

C'est la recherche, par Aristarque de Samos, du rapport approché des distances de la Terre au Soleil et à la Lune, et celle, par Archimède, du volume de la sphère ayant pour rayon la distance de la Terre au Soleil, qui introduisirent dans la Géométrie les premiers éléments d'une méthode de calcul numérique.

Il fallait pour cela l'introduction d'une idée nouvelle qu'Aristarque de Samos et Archimède imaginèrent sans doute avec bien peu de peine, puisqu ils n'ont pas même laissé de traces dans leurs écrits de la manière dont ils ont raisonné.

Mais il est facile de suppléer à leur silence.

Supposons d'abord que l'on sache que deux rectangles [A, B] et [C, D] sont égaux, que l'on connaisse les côtés A et B du premier, ainsi que le côté C du second, et qu'on veuille trouver le côté D.

On pourrait construire D par une quatrième proportionnelle.

$$C : B :: A : D.$$

Mais, si A est donné en stades et qu'on connaisse exactement la raison de C à B, on pourra trouver D en stades ou parties du stade; si la raison de C à B ne pouvait pas être exprimée exactement en nombre, on ne pourrait non plus avoir D en nombre. mais on chercherait deux raisons qui comprissent celle de C à B; on déterminerait dans les deux cas la grandeur de D, et la véritable ligne cherchée serait comprise entre les deux lignes trouvées.

Mais ce cas est trop facile.

Supposons en second lieu qu'on sache que trois longueurs A, B et C sont les trois côtés d'un triangle rectangle, A l'hypoténuse, B et C les côtés de l'angle droit; que l'on donne A et B et que l'on demande C.

Il se présentera deux cas, selon que la raison de A à B sera ou non connue exactement. Supposons d'abord le premier cas, et que cette raison soit celle de 9 à 4.

On divisera B en 400 parties égales par exemple, de façon que A en contiendra 900; alors, pour avoir le nombre de ces parties contenues dans C, on raisonnera de la manière suivante:

Le carré construit sur B contiendrait 160 000 petits carrés ayant pour côtés une des divisions, et le carré construit sur A en contiendrait 810 000; par conséquent le carré construit sur C en contiendrait virtuellement 650 000.

Mais un carré qui contiendrait 649 636 des petits carrés con-

sidérés aurait son côté égal à 806 parties de A ou de B; et un carré qui contiendrait 651 249 des mêmes petits carrés aurait son côté égal à 807 des mêmes parties.

Le carré construit sur C étant donc plus grand que 649 636 petits carrés et plus petit que 651 249, son côté sera plus grand que 806 parties et plus petit que 807.

Si la raison de B à A n'était pas exactement exprimable en nombre, Archimède augmenterait, par exemple, A, sans changer B, ce qui augmenterait C, et, la raison de B à A étant devenue commensurable, il déterminerait, comme précédemment C, mais par excès; il diminuerait ensuite A, sans changer B, obtiendrait de nouveau C, mais par défaut, et suivant le but qu'il se proposerait, il prendrait, pour valeur approchée de C, sa limite supérieure, ou sa limite inférieure.

Telle fut la manière de raisonner d'Aristarque et d'Archimède; on aperçoit nettement cette méthode dans le *Traité des distances* et dans le *Traité de la mesure du cercle.*

Au reste, il faut bien remarquer que la distance qui sépare les deux notions de raison et de rapport n'est pas encore franchie et ne le sera pas de longtemps. Il y a une raison entre les longueurs de la circonférence et du rayon d'un cercle, parce que ces deux longueurs varient proportionnellement, mais comme il n'y a probablement pas de nombre qui puisse exprimer cette raison, on ne saurait l'abstraire, et se proposer de la calculer serait jugé un problème absurde. Aussi Archimède ne cherche-t-il pas le rapport de la circonférence au diamètre, mais la grandeur de la circonférence dont on donne le rayon.

Progrès de la Géométrie.

Les *Éléments* d'Euclide contenaient les propriétés descriptives du cercle et de la sphère, du cylindre et du cône de révolution, mais non les théorèmes relatifs à leur étendue. Eudoxe avait bien affirmé que le volume du cône est le tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur, mais personne n'était allé au delà. Archimède compléta la théorie en faisant voir que le cercle est égal au triangle qui aurait pour base la longueur de la circonférence et pour hauteur le rayon; que la surface du cylindre est égale à celle du rectangle qui aurait pour base la circonférence et pour hauteur la hauteur du cylindre; que le volume d'un cylindre est égal au volume du prisme qui aurait une base égale à celle du cylindre et même hauteur; que la surface de la sphère est égale à quatre grands cercles, et que celle d'une zone est égale à celle d'un cylindre qui aurait pour base un grand cercle et pour hauteur celle de la zone; que le volume de la sphère est les deux tiers de celui du cylindre ayant pour base un grand cercle et pour hauteur le diamètre de la sphère; que le volume d'un segment sphérique est égal au volume de la sphère qui aurait pour diamètre la hauteur de ce segment, augmentée de la demi-somme des cylindres qui auraient pour bases les deux bases du segment et pour hauteur commune la hauteur de ce segment.

Enfin il donna une méthode pour obtenir avec telle approximation que l'on voudrait le rapport de la circonférence au diamètre.

Mais ce n'est là que la moindre partie de ce que la Géométrie doit à Archimède : après avoir quarré un segment quelconque de

parabole, et fait voir qu'une ellipse est égale en surface au cercle qui aurait pour rayon la moyenne proportionnelle entre les demi-axes de cette ellipse, il conçut l'idée sublime d'assimiler les segments droits ou obliques de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde de révolution à des segments sphériques, déformés de trois manières dont il serait facile de tenir compte, au moyen de trois rapports, les sections elliptiques du segment de sphéroïde ou de conoïde pouvant être remplacées chacune par un cercle, le carré du rayon de ce cercle variant, comme dans la sphère, proportionnellement au rectangle des segments du diamètre, déterminés par le plan sécant, et enfin les portions du diamètre interceptées entre deux sections conservant une inclinaison constante avec les plans de ces sections.

Quant au volume du segment de paraboloïde, la question était encore plus simple; la surface d'une section parallèle à la base croissant comme la partie interceptée par le plan sécant sur le diamètre, ce qui permettait de remplacer cette section par une ellipse dont l'un des axes aurait été constant et dont l'autre aurait crû proportionnellement à la distance du plan sécant au plan tangent parallèle à la base; ou plus simplement encore de substituer au segment de paraboloïde un segment de prisme triangulaire indéfini, coupé par un plan parallèle à l'une de ses arêtes.

Cette méthode avait reçu des anciens le nom de *méthode* d'exhaustion; on peut, je crois, dire aujourd'hui qu'elle eût donné naissance, deux mille ans plus tôt, au Calcul intégral, si l'Algèbre eût pu être alors rendue indépendante de la Géométrie.

Archimède avait à peine disparu sous les ruines de Syracuse, qu'Apollonius venait briller à Alexandrie, et acquérir, dans une autre voie plus facile à suivre, une gloire presque égale, au moins

aux yeux des contemporains, en complétant la théorie des coniques et appliquant cette théorie à la solution de problèmes déterminés d'une véritable difficulté.

Progrès de la Mécanique.

La Mécanique pratique a pris naissance dans les temps préhistoriques, et les monuments égyptiens, assyriens et autres montrent qu'elle avait pris déjà de grands développements avant les Grecs; mais la Mécanique théorique est née entre les mains d'Archimède, par l'établissement des conditions d'équilibre du levier, soumis à des forces parallèles, et par la constitution de la théorie des centres de gravité.

Cette théorie fournissait en même temps au plus grand des géomètres l'occasion d'enrichir la Géométrie de recherches encore plus profondes que les précédentes, et de se surpasser, pour ainsi dire, en déterminant l'inclinaison sous laquelle un segment de paraboloïde pouvait se tenir en équilibre sur un fluide plus pesant.

Progrès de la Physique.

Aristote avait rendu à la Physique le grand service de la débarrasser des solutions trop faciles que fournissait en abondance la libéralité avec laquelle ses prédécesseurs avaient doté les dieux de toutes les fonctions utiles et même nuisibles. Mais Aristote n'avait su remplacer les influences surnaturelles que par des pétitions de principe et des cercles vicieux.

C'est encore à Archimède qu'il faut faire remonter la première initiation de l'esprit humain dans le domaine physique, par l'exposition d'une conception nette de la pesanteur, et surtout par la découverte du principe qui porte son nom.

Progrès de l'Astronomie et de la Géodésie.

Dans cette période, Aristarque détermine scientifiquement le rapport des distances du Soleil et de la Lune à la Terre, et ne se trompe, dans l'évaluation de ce rapport, que faute d'instruments pour mesurer un angle trop petit.

Peu de temps après, Ératosthène obtient une valeur assez approchée de la longueur d'un degré du méridien terrestre.

BIOGRAPHIE

DES

SAVANTS DE LA DEUXIÈME PÉRIODE

ET

ANALYSE DE LEURS TRAVAUX

ARISTARQUE DE SAMOS.

(Né vers — 310.)

Nous croyons pouvoir fixer sa naissance vers — 310, parce que Ptolémée rapporte de lui une observation d'un solstice, faite la cinquantième année de la première période calippique, laquelle correspond à l'année — 281.

Il ne nous reste d'Aristarque de Samos que son petit *Traité des grandeurs et distances du Soleil et de la Lune*, dont nous donnerons une analyse que nous aurions voulu pouvoir étendre un peu davantage.

Ce que l'on sait de ses théories astronomiques nous a été conservé par Archimède, que nous citerons d'abord.

C'est dans son *Arénaire* qu'Archimède rapporte les opinions d'Aristarque de Samos.

« Tu sais, écrit-il à Gélon, fils d'Hiéron, roi de Syracuse, que le monde est appelé par la plupart des astronomes une sphère dont le centre est le même que celui de la Terre et dont le rayon

est égal à la droite placée entre le centre de la Terre et celui du Soleil. Aristarque de Samos rapporte ces choses en les réfutant, dans les propositions qu'il a publiées contre les astronomes. D'après ce qui est dit par Aristarque de Samos, le monde serait beaucoup plus grand que nous venons de le dire; car il suppose que les étoiles et le Soleil sont immobiles; que la Terre tourne autour du Soleil comme centre, et que la grandeur de la sphère des étoiles fixes, dont le centre est celui du Soleil, est telle que la circonférence du cercle qu'il suppose décrite par la Terre est à la distance des étoiles fixes *comme le centre de la sphère est à la surface*. Mais il est évident que cela ne saurait être, parce que le centre de la sphère n'ayant aucune grandeur, il s'ensuit qu'il ne peut avoir aucun rapport avec la surface de la sphère. Mais à cause que l'on conçoit la Terre comme étant le centre du monde, il faut penser qu'Aristarque a voulu dire que la Terre est à la sphère que nous appelons *le monde*, comme la sphère, dans laquelle est le cercle qu'il suppose décrit par la Terre, est à la sphère des étoiles fixes; car il établit ses démonstrations en supposant que les phénomènes se passent ainsi; et il paraît qu'il suppose que la grandeur de la sphère dans laquelle il veut que la Terre se meuve, est égale à la sphère que nous appelons *le monde*. »

Ce passage montre clairement combien avaient été nettes, dans l'antiquité, les opinions que Copernic et ses partisans n'ont pu faire revivre qu'avec tant de difficultés dans les temps modernes. Il convient de dire toutefois qu'Archimède ne les partageait pas, et ne les présente même pas comme il eût fallu.

Le *Traité des distances et grandeurs du Soleil et de la Lune* a été traduit en latin par M. de Fortia d'Urban en 1823; c'est de

cette traduction que nous nous servons. Aristarque essaye de déterminer le rapport des distances de la Terre au Soleil et à la Lune, au moyen de l'angle sous lequel on voit la distance des centres de ces deux derniers astres, lorsque la Lune est dichotome, c'est-à-dire partagée en deux parties égales; ou en d'autres termes, lorsque la Lune entre dans son premier ou son dernier Quartier.

A ce moment, le triangle qui aurait pour sommets le Soleil, la Lune et la Terre est rectangle en son sommet placé au centre de la Lune, et si l'on observe l'angle de ce triangle qui a son sommet à la Terre, on pourra aisément construire un triangle semblable, dont les côtés figureraient proportionnellement les distances des trois astres; mais Aristarque veut obtenir les trois côtés en nombres, ce dont il n'y avait pas de précédent.

L'ouvrage se compose de dix-neuf propositions dont nous croyons devoir citer les principales.

Les deux premières propositions ont pour objet de faire voir que deux sphères peuvent être inscrites dans un même cylindre ou dans un même cône; la troisième, que si une sphère est éclairée par une autre plus grande, la partie éclairée dépassera la demi-sphère; dans la quatrième, Aristarque fait voir que le cercle d'illumination de la Lune (c'est le cercle qui sépare la partie éclairée de la partie obscure) est d'autant plus petit que la Lune est plus près d'être en conjonction, parce que sa distance au Soleil est moindre; dans la cinquième, il fait voir que, même lorsque le cercle d'illumination est le plus petit, c'est-à-dire lors de la conjonction, il ne diffère qu'insensiblement d'un grand cercle. La sixième proposition a pour objet de montrer que, lorsque la Lune est dichotome, le plan du cercle d'illumination passe par le point de vue. Aristarque démontre dans la septième que la Lune est

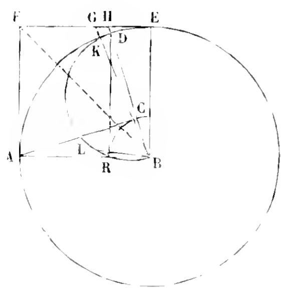
plus près de la Terre que le Soleil (*infrà Solem fertur*), et que lorsqu'elle est dichotome, elle est séparée du Soleil de moins d'un quadrant, ce qui est évident.

Proposition VIII. — La distance du Soleil à la Terre est plus grande que dix-huit fois et moindre que vingt fois la distance de la Lune à la Terre.

Aristarque n'arrive à ces conclusions fausses que parce qu'il admet que l'angle sous lequel on voit la distance du Soleil à la Lune dichotome diffère d'un quadrant de la 30ᵉ partie d'un quadrant, ou de 3°, tandis qu'il n'en diffère réellement que de 9′, à peu près; mais son argumentation est parfaitement exacte.

Soient (*fig.* 4) :

Fig. 4.



A le centre du Soleil,

B celui de la Terre,

C celui de la Lune dichotome,

BE la perpendiculaire à BA.

D le point de rencontre de BC avec la circonférence de rayon BA,
FABE le carré construit sur AB,
H le point de rencontre de BC prolongée avec FE.
BKG la bissectrice de l'angle FBE.

L'angle HBE est la 30e partie de l'angle droit, et l'angle GBE en est le quart, donc

$$GBE : HBE :: \frac{1}{4} : \frac{1}{30} :: \frac{30}{4} : 1 :: 15 : 2;$$

par conséquent le rapport de GE à EH est plus grand que $\frac{15}{2}$.

Aristarque ne le démontre pas, mais c'est évident, la tangente croissant bien plus rapidement que l'angle.

D'un autre côté.

$$\overline{FB}^2 = 2\,\overline{BE}^2;$$

mais, à cause de la propriété de la bissectrice.

$$\frac{FG}{GE} = \frac{FB}{BE};$$

d'où

$$\frac{\overline{FG}^2}{\overline{GE}^2} = \frac{\overline{FB}^2}{\overline{BE}^2} = 2.$$

Mais 2 n'est pas un carré; Aristarque le remplace par $\frac{49}{25}$ et conclut : donc

$$\frac{\overline{FG}^2}{\overline{GE}^2} > \frac{49}{25},$$

par conséquent

$$\frac{FG}{GE} > \frac{7}{5},$$

ou

$$\frac{FG + GE}{GE} = \frac{FE}{GE} > \frac{12}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{36}{15}.$$

Mais il a été démontré que

$$\frac{GE}{EH} > \frac{15}{2};$$

donc

$$\frac{FE}{EH} > \frac{36}{2}, \quad \text{ou} \quad 18.$$

Enfin les triangles ACB et HBE sont semblables, de sorte que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BE}{EH} = \frac{FE}{EH} > 18;$$

mais AC est moindre que AB, donc à plus forte raison

$$\frac{AB}{BC} > 18.$$

« Est autem AB distantia qua distat Sol a Terra; CB vero distantia qua distat Luna a Terra. Igitur distantia qua distat Sol a Terra, distantiæ qua distat Luna a Terra major est quam duodevigentupla. »

La démonstration revêt partout cette majestueuse ampleur.

Ainsi la raison de AB à BC est plus grande que 18.

Aristarque veut maintenant démontrer qu'elle est inférieure à 20.

Pour cela, il abaisse DR perpendiculaire à AB, décrit la demi-circonférence DRB sur DB comme diamètre, et prend BL égale

à la moitié de BD, c'est-à-dire égale au côté de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle décrit sur BD comme diamètre.

L'arc BR est la 60^e partie de la circonférence, et l'arc BRL en est la 6^e partie; donc

$$\frac{\text{arc}\,BRL}{\text{arc}\,BR} = 10;$$

mais

$$\frac{BL}{BR} < \frac{\text{arc}\,BL}{\text{arc}\,BR},$$

parce que la corde croît moins vite que l'arc; donc

$$\frac{BL}{BR} < 10.$$

et, par suite,

$$\frac{BD}{BR} < 20;$$

mais

$$BD : BR :: BA : BC;$$

donc

$$\frac{BA}{BC} < 20.$$

Si l'on refaisait le calcul d'Aristarque, en supposant comme lui que l'angle des droites menées du Soleil à la Terre et à la Lune dichotome fût de 3°, on trouverait pour le rapport des distances à peu près 19; on voit donc qu'Aristarque a opéré d'une façon assez habile.

Mais l'angle en question est à peu près 20 fois moindre que ne le supposait Aristarque qui n'avait aucun moyen d'apprécier un angle de 9′.

Proposition IX. — Lorsque le Soleil est complètement éclipsé,

cet astre et la Lune sont compris dans un même cône qui a son sommet tourné vers nous.

Cela est vrai; mais, en réalité, Aristarque suppose que le sommet du cône est à l'œil de l'observateur.

Proposition X. — Le diamètre du Soleil est compris entre 18 et 20 fois celui de la Lune.

Cela résulte de l'hypothèse fausse que nous venons d'énoncer.

Proposition XI. — Aristarque conclut du rapport des rayons des deux astres le rapport de leurs volumes.

Proposition XII. — Le diamètre de la Lune est compris entre la 45^e^ partie et la 30^e^ partie de la distance qui nous sépare de cet astre.

Aristarque a dit plus haut que la Lune cache $\frac{1}{15}$ d'un signe du zodiaque, ou que l'angle sous lequel on la voit est de $\frac{1}{45}$ de droit; il en conclut avec raison que le diamètre de la Lune est moindre que la 45^e^ partie de la distance qui nous sépare de l'astre; il trouve la limite inférieure $\frac{1}{30}$ par des considérations analogues à celles que nous avons rapportées plus haut.

Proposition XIII. — Le diamètre du cercle d'illumination de la Lune est moindre que le diamètre de la Lune, mais il en dépasse les $\frac{89}{90}$.

Proposition XIV. — Lorsque la Lune est éclipsée, le diamètre du cône d'ombre porté par la Terre, à la distance de la Lune, est moindre que le double du diamètre de la Lune, mais plus grand que les $\frac{88}{45}$ de ce diamètre; il est moindre que la 9^e^ partie du diamètre du Soleil et plus grand que les $\frac{22}{225}$ de ce diamètre.

Ce sont des conséquences approchées de ce qui précède.

Proposition XVI. — Le diamètre de la Terre est compris entre les $\frac{3}{19}$ et les $\frac{6}{43}$ du diamètre du Soleil.

Proposition XVIII. — Le diamètre de la Lune est compris entre les $\frac{43}{108}$ et les $\frac{19}{60}$ de celui de la Terre.

Nous avons admis avec Montucla, d'après le témoignage de Vitruve, qu'Eudoxe avait imaginé le cadran solaire horizontal, nommé *arachné*. Le style qu'il y employait n'était certainement qu'un gnomon vertical et, dans ces conditions, la construction du cadran présente des difficultés réelles. Aussi Delambre rejette-t-il l'hypothèse de Montucla. Cependant l'arachné existait du temps de Vitruve, par conséquent avant Ptolémée; et il ne paraît pas qu'il y ait de raisons pour enlever à Eudoxe l'honneur de l'avoir inventé, puisqu'on éprouverait le même embarras en l'attribuant à un autre, fût-ce Apollonius. Au reste, Vitruve ne dit pas comment se construisait l'arachné, et l'on conçoit qu'on puisse faire par à peu près, sans théorie, ce qu'on ne pourrait faire exactement qu'à l'aide d'une théorie en règle. Eudoxe ne pouvait pas calculer, comme fit Ptolémée, les longueurs des ombres de son gnomon, correspondant aux différentes distances zénithales du Soleil, mais il pouvait les construire.

Montucla attribue, également d'après Vitruve, à Aristarque de Samos l'invention du *scaphé*, formé d'une calotte hémisphérique dont le bord était horizontal, et qui portait un style vertical ayant son sommet au centre de la sphère. Delambre rejette également cette hypothèse. Cependant la construction de ce cadran se fait par les moyens les plus élémentaires : le rayon visuel mené de la pointe du style au Soleil décrit chaque jour un cône de révolution dont la seconde nappe coupe la sphère suivant un cercle, lieu de l'ombre de la pointe du style; tous ces cercles ont pour pôle commun le point de rencontre de la sphère avec la ligne des pôles du monde; les points de division qui doivent, sur ces cercles, correspondre

aux milieux des jours, sont tous sur le grand cercle de la sphère contenu dans le plan méridien, et enfin les divisions qui doivent correspondre aux heures sont, sur chaque cercle, égales à la 24e partie de ce cercle. Il n'y a donc rien d'impossible à ce qu'Aristarque de Samos ait construit un pareil cadran, d'autant qu'il n'était pas même nécessaire qu'il fît correspondre ses cercles à des époques déterminées de l'année; il suffisait qu'il en décrivît assez pour que l'ombre de la pointe du style tombât toujours à peu près sur l'un d'eux.

On a retrouvé plusieurs de ces cadrans dans les ruines de Tusculum et de Pompeï.

ÉRATOSTHÈNE.

(Né vers — 300.)

Suidas lui donne pour père un certain Aglaos; d'autres le font fils d'Ambrosius ; la question a d'autant moins d'importance qu'Aglaos et Ambrosius ne sont connus ni l'un ni l'autre. Ses maîtres furent Ariston de Chios, Lysanias de Cyrène et Callimaque.

« Ératosthène, dit Montucla, fut un de ces hommes rares dont le génie étendu embrasse tous les genres de savoir : orateur, poète, antiquaire, mathématicien et philosophe, il fut par quelques-uns nommé *Pentathlos,* nom qu'on donnait à l'athlète vainqueur dans les cinq luttes des jeux Olympiques. » On lui décerna aussi le nom de *second Platon*.

Il vivait, dit-on, à Athènes, lorsque Ptolémée Évergète, sur la foi de sa renommée, l'appela à Alexandrie pour le mettre à la tête de la fameuse bibliothèque de cette ville. C'est très probablement lui qui fit construire les grandes armilles dont se servirent si longtemps les astronomes de l'école d'Alexandrie. « Nous ne voyons qu'Ératosthène, dit Delambre, à qui nous puissions attribuer les armilles équatoriales, ou au moins la plus ancienne. Quant à l'armille solsticiale, on pourrait également en faire honneur à Ératosthène. Toutefois, il est bon de remarquer que Ptolémée ne dit pas expressément qu'elle ait existé. » Ces armilles étaient des cercles divisés, munis d'alidades et pouvant donner les angles à un douzième de degré près, c'est-à-dire à cinq minutes près.

Les deux observations les plus importantes d'Ératosthène, et qui se lient l'une à l'autre, eurent pour objet la détermination de l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur et la mesure de la circonférence de la terre.

Une évaluation grossière de la grandeur du méridien terrestre, rapportée sans commentaires par Aristote, ne saurait enlever à Ératosthène la gloire d'avoir le premier recherché par des moyens rationnels la solution du plus important de tous les problèmes de Géodésie. Ératosthène, d'ailleurs, donna une mesure à peu près satisfaisante de la circonférence du globe, tandis que celle que donne Aristote est près de deux fois trop grande, si, comme il est naturel de le supposer, le stade que ce philosophe prend pour unité était le stade olympique.

Voici comment Ératosthène arriva à la détermination approximative de la longueur du méridien. Il avait trouvé que la différence des déclinaisons maximum et minimum du Soleil était les $\frac{11}{83}$ de 360° ou $47^\circ 42' 40''$ à peu près, ce qui donnait $23^\circ 51' 20''$

pour l'obliquité de l'écliptique, évaluation, qui, du reste, fut acceptée par Hipparque et Ptolémée.

Il était arrivé à ce résultat en mesurant à Alexandrie les hauteurs du Soleil à midi, le jour du solstice d'été et le jour du solstice d'hiver.

Dans la première observation il trouvait qu'à Alexandrie, à midi, le jour du solstice d'été, le Soleil n'était distant du zénith que de $\frac{1}{50}$ de la circonférence. D'un autre côté, on savait qu'à Syène, dans la haute Égypte, le Soleil passait au zénith à midi, le jour du solstice, puisque les fonds des puits y étaient directement éclairés ce jour-là par le Soleil; la différence en latitude des deux villes était donc de $\frac{1}{50}$ de la circonférence.

Ces deux villes étant d'ailleurs à peu près sur le même méridien, leur distance devait donner à peu près la longueur de $\frac{1}{50}$ d'un grand cercle de la sphère; or, des mesures commencées en Égypte par les ordres d'Alexandre et continuées sous ses successeurs donnaient 5000 stades pour la distance des deux villes; il fallait donc conclure de tous ces éléments que le méridien terrestre comprenait 50 fois 5000 stades ou 250 000 stades. Ératosthène crut devoir adopter 252 000 stades.

M. Vincent a fait remarquer que le stade employé par Ératosthène devait être le stade égyptien de 300 coudées, et, le musée du Louvre contenant plusieurs étalons de coudées égyptiennes, il a voulu savoir ce que donnaient en mètres 252 000 stades. Il a trouvé 39 879 000^{m}. L'erreur d'Ératosthène ne serait donc que de 121 000^{m}. Nous croyons que si M. Vincent l'avait fermement voulu, il eût trouvé 40 millions de mètres; à moins qu'il n'eût préféré faire faire par Ératosthène la correction apportée par Biot et Arago à l'évaluation de Delambre et de Méchain.

Suivant Plutarque, Ératosthène attribuait 804 millions de stades à la distance qui nous sépare du Soleil, et 780 000 stades à celle qui nous sépare de la Lune. Il aurait donc trouvé la distance de la Terre au Soleil à peu près 1030 fois plus grande que celle de la Terre à la Lune. Aristarque ne l'avait trouvée que 19 fois plus grande, et le rapport vrai est à peu près 400.

Plutarque aurait dû réfléchir que si Aristarque manquait d'instruments qui lui permissent de distinguer 9' de 3°, il serait difficile d'admettre qu'Ératosthène eût pu évaluer un angle de moins d'une minute.

Concluons que si Plutarque a bien fait de causer d'Astronomie, on ferait bien aussi de ne pas trop l'écouter.

D'après Macrobe, Ératosthène croyait le diamètre du Soleil 27 fois seulement plus grand que celui de la Terre. D'où l'on peut conclure que Macrobe n'avait pas lu Plutarque, mais aussi qu'il est absurde de recueillir avec le soin qu'on y met d'ordinaire les on-dit de tous les littérateurs de la décadence grecque ou romaine.

Pappus cite d'Ératosthène un ouvrage qui aurait été intitulé : *De locis ad medietates*, et qui sans doute se rapportait au problème de la duplication du cube, dont on sait qu'il avait écrit l'histoire, dédiée à Ptolémée.

Il avait imaginé un instrument, nommé par lui *mésolabe*, pour servir à l'insertion de deux moyennes proportionnelles. Pappus indique la construction de ce mésolabe dans ses *Collections mathématiques*.

Ératosthène est encore célèbre par l'invention de son crible (*koskinon*), méthode bien connue pour trouver les nombres premiers, mais qui n'a, du reste, rien de remarquable.

Parmi ses autres travaux, les anciens faisaient grand cas de ses

Géographiques. Cet ouvrage était divisé en cinq livres : le premier contenait une revue critique des ouvrages antérieurs sur le même sujet et l'énumération des diverses preuves de la sphéricité de la Terre ; dans le second livre se trouvait la mesure de la circonférence de la Terre par la méthode exposée plus haut ; les autres étaient consacrés à la Géographie politique. On ignore si cet Ouvrage contenait une carte du Monde alors connu. Il n'en reste d'ailleurs que des fragments cités par Polybe, Strabon, Marcien, Pline et autres.

Sa *Chronographie,* où il essayait de fixer exactement les dates des principaux événements mentionnés par l'Histoire, a été aussi très appréciée de l'antiquité.

Parmi ses compositions purement littéraires, on remarquait le traité *Sur la vieille comédie attique*.

La liste complète des ouvrages attribués à Eratosthène, ainsi que tous les fragments qui nous restent de ses écrits, se trouve dans les *Eratosthenica* de Bernhardy (Berlin, 1822, in-8).

ARCHIMÈDE.

(Né à Syracuse en — 287, mort en — 212.)

Quoique parent du roi Hiéron, il ne paraît avoir été investi d'aucune charge publique. Il alla, jeune encore, à Alexandrie où il suivit les leçons d'Euclide, et à son retour il s'adonna entièrement à ses études.

Nous ne savons à quelles époques il adressa ses ouvrages à Conon et à Dosithée.

A la mort d'Hiéron, qui gouverna en paix Syracuse près de cin-

quante ans, son petit-fils lui succéda, mais mourut peu après. Un général sicilien, nommé Hippocratès, voulut alors s'emparer du pouvoir, se ménagea des intelligences avec Carthage et fit assassiner tous les Romains qui habitaient Léontium.

Rome résolut aussitôt la ruine de Syracuse et envoya Appius et le consul Marcellus pour exécuter les ordres du sénat.

Lorsque les Romains arrivèrent devant la ville, Archimède en dirigea la défense, et Polybe, Tite-Live, ainsi que Plutarque, nous donnent la description des moyens que son génie lui suggéra dans cette circonstance, pour porter le ravage sur les vaisseaux ennemis. Pendant trois ans, la science d'un seul homme tint en échec l'armée de Marcellus. Il fit construire des machines propres à lancer des traits et des pierres à des distances considérables; il y en avait qui saisissaient les galères des Romains au moyen d'un croc, les soulevaient, et en les laissant retomber, les abîmaient dans les flots ou les brisaient contre les rochers. On rapporte aussi qu'il enflammait les vaisseaux des assiégeants, à une certaine distance, au moyen de miroirs ardents.

Ce ne sont là évidemment que des contes suggérés par la grandeur du génie de l'illustre physicien et une preuve de l'admiration qu'il inspirait à ses contemporains.

Marcellus fut obligé de convertir le siège en blocus. « Ne voulons-nous point, disait-il à ses ouvriers et ingénieurs, cesser de faire la guerre à ce Briarée géomètre, qui, en se jouant, a plongé et enfoncé nos navires en la mer... et a surpassé tous les géants à cent mains dont les fables des poètes font mention, tant il nous a deslaché de traicts, de pierres et de flèches tout à un coup? » Ce qui semble indiquer que la lecture des romans de chevalerie faisait déjà les délices des généraux romains.

Cependant le génie d'Archimède ne parvint pas à sauver sa patrie ; les Romains réussirent à entrer dans Syracuse par surprise. Archimède était alors si absorbé dans la recherche d'un problème de Géométrie, qu'il n'eut aucune connaissance de ce qui se passait.

Un soldat s'introduisit chez lui et le somma de le suivre. Archimède l'ayant prié d'attendre qu'il eût terminé son opération, le soldat impatienté le perça de son épée, l'an 212 avant Jésus-Christ.

Marcellus éprouva le plus vif regret de la mort de ce grand homme ; il traita ses parents avec distinction, et lui fit élever un tombeau sur lequel, d'après le vœu d'Archimède lui-même, on plaça une sphère inscrite dans un cylindre. Cicéron, pendant sa questure en Sicile, retrouva ce monument caché parmi les broussailles.

Les ouvrages d'Archimède nous sont presque tous parvenus, et même dans le texte grec. Il faut, cependant, excepter le *Traité des corps qui sont portés sur un fluide,* qu'on ne connaît que par un manuscrit latin; les *Lemmes*, qu'on a refaits sur un manuscrit arabe, et le livre où devait se trouver la détermination du centre de gravité d'un segment de paraboloïde de révolution, livre dont il n'existe plus de traces.

Quant aux autres ouvrages d'Archimède que nous n'avons pas, entre autres un livre des *Principes* de la numération, c'étaient des premières copies, adressées à divers amis, mais qu'Archimède a remplacées lui-même.

Les ouvrages d'Archimède, dans l'ordre où les a placés M. Peyrard, sont : *De la sphère et du cylindre ; De la mesure du cercle ; Des conoïdes et des sphéroïdes ; Des hélices ; De l'équilibre des*

plans ; De la quadrature de la parabole ; Des corps portés sur un fluide ; les *Lemmes* et l'*Arénaire.*

Il existe un grand nombre d'éditions d'Archimède en grec et en latin. La seule traduction en langue vulgaire est celle que Peyrard, bibliothécaire à l'École Polytechnique, a publiée en 1807-1808; elle a été approuvée par l'Académie des Sciences sur le rapport de Lagrange et de Delambre rapporteur,qui prit le soin de comparer les deux textes grec et français et qui a même aidé Peyrard de ses conseils.

Les ouvrages d'Archimède ne contiennent absolument que ses découvertes; il renvoie aux ouvrages élémentaires connus de son temps pour toutes les propositions enseignées avant lui dans les écoles.

Comme Archimède a vécu soixante-quinze ans et a travaillé jusqu'à la fin de ses jours, d'après ses contemporains, il y aurait intérêt à savoir dans quel ordre il a écrit ses ouvrages.

Aucun des traités définitifs que nous avons n'a été adressé à Conon; Conon n'avait reçu que des programmes et des énoncés.

Quatre traités ont été adressés à Dosithée; ce sont : *De la sphère et du cylindre; Des conoïdes et des sphéroïdes; Des hélices* et *De la quadrature de la parabole.*

Les autres, excepté l'*Arénaire*, ne sont accompagnés d'aucune lettre d'envoi. Il est donc problable que Dosithée était mort lorsqu'Archimède leur donna leur forme définitive, et que la *Mesure du cercle*, l'*Équilibre des plans*, les *Corps portés sur un fluide*, les *Lemmes* et l'*Arénaire* sont postérieurs aux autres.

Les traités de la quadrature de la parabole et de l'équilibre des plans sont évidemment connexes, puisque Archimède mêle les

considérations relatives à la pesanteur au problème de la quadrature de la parabole.

Quant à l'*Arénaire*, il est adressé au roi Gélon, fils de Hiéron, et je pense pour cette raison que ce doit être le dernier ouvrage d'Archimède. Je serais tenté d'en rapprocher la *Mesure du cercle,* parce qu'Archimède n'avait pas besoin de la mesure du cercle avant d'entamer la question qu'il traite dans l'*Arénaire.*

Jusque-là, en effet, il compare des figures entre elles, des volumes entre eux; il établit des équivalences, mais il n'évalue ni une surface ni un volume; tandis que dans le traité de l'*Arénaire* il a besoin du volume d'une sphère dont le rayon est donné par un nombre de stades et par conséquent il a besoin de connaître la valeur du rapport de la circonférence au diamètre. Il l'y emploie effectivement et il ne l'emploie nulle part ailleurs, de sorte qu'il semble bien que le traité de la *Mesure du cercle* ne soit qu'une introduction au traité de l'*Arénaire.*

Le calcul de π aurait peut-être été la première chose à laquelle eût pensé Hipparque, mais ce devait être la dernière dont se préoccupât Archimède.

Quant aux traités adressés à Dosithée, on voit par les lettres d'envoi qu'Archimède n'en avait trouvé les éléments qu'à différentes reprises et s'était occupé tantôt des uns, tantôt des autres. Il en avait même envoyé antérieurement, soit à Conon, soit à d'autres, des ébauches incomplètes et même défectueuses. Les copies qu'a reçues Dosithée sont, si l'on peut s'exprimer ainsi, les dernières éditions, en sorte que ces traités n'ont pas de date; on ne sait pas exactement pour tous dans quel ordre les envois ont été faits, mais on le saurait qu'on n'en pourrait tirer aucune conséquence, par la raison que nous venons de dire.

Je suivrai l'ordre adopté par Peyrard, sauf en ce qui concerne le traité de la *Mesure du cercle.*

De la sphère et du cylindre.

Archimède commence par définir une ligne concave d'un même côté et une surface concave d'un même côté; puis il pose ces deux principes que, si deux lignes concaves d'un même côté ont mêmes extrémités et que l'une entoure l'autre, la ligne entourante sera plus longue que la ligne entourée; et que si deux surfaces concaves d'un même côté se terminent à la même ligne dans un plan, et que l'une entoure l'autre, la surface entourante aura plus d'étendue que la surface entourée.

Ces propositions sont indémontrables, ce sont donc de véritables principes; elles fixent les notions de longueur courbe et de superficie courbe et en remplacent les définitions, qu'il serait impossible de donner, à moins de considérer les longueurs des lignes courbes comme limites des longueurs de polygones inscrits et les superficies courbes comme limites de surfaces planes terminées à des lignes courbes planes tracées sur les surfaces courbes proposées, lorsque ce serait possible, ou, dans le cas général, terminées par des lignes polygonales ayant leurs sommets, seulement. sur les surfaces courbes considérées.

Archimède pose encore ce troisième principe : Si deux grandeurs, longueurs, superficies ou solides, sont inégales, leur différence ajoutée à elle-même un assez grand nombre de fois surpassera l'une ou l'autre des deux grandeurs comparées.

Les personnes qui connaissent la Géométrie de Legendre savent

quel usage on peut faire de ces principes et comment ils suffisent; mais cet ouvrage ne donnerait qu'une idée bien imparfaite de la manière infiniment plus fine dont Archimède les met en œuvre. Au reste, Legendre, qui n'énonce même pas le troisième principe, comme trop évident, avait affaire à des lecteurs mieux préparés et n'était pas obligé à d'aussi grandes délicatesses.

Je voudrais pouvoir caractériser un peu mieux la méthode d'Archimède, mais il faudrait entrer dans des détails que ne comporte pas l'étendue de cet Ouvrage.

Je me bornerai à faire remarquer la finesse de cette substitution d'idées. Archimède ne dit pas : La différence entre les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un même cercle, peut devenir plus petite que toute quantité donnée, chose qui paraîtrait très claire aujourd'hui, quoique l'infiniment petit y soit en essence; il dit : Deux quantités inégales et un cercle étant donnés, il est possible d'inscrire un polygone dans ce cercle et de lui en circonscrire un autre (semblable), de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Voici les énoncés des principales propositions contenues dans le *Traité de la sphère et du cylindre;* la forme en est importante à remarquer pour l'historien :

Proposition XIV. — La surface d'un cylindre droit quelconque, la base exceptée, est égale à celle d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

Proposition XV. — La surface d'un cône droit quelconque, la base exceptée, est égale à celle d'un cercle dont le rayon est

moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

Proposition XVII. — Si un cône droit est coupé par un plan parallèle à la base. la surface comprise entre les plans parallèles est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la partie du côté du cône comprise entre les plans parallèles et une droite égale à la somme des rayons des cercles qui sont dans les plans parallèles.

Proposition XXXV. — La surface d'une sphère quelconque est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.

Archimède ne s'occupe ni du volume du cylindre ni du volume du cône, parce qu'on savait avant lui qu'un cylindre est égal à un prisme de même base et de même hauteur, et qu'un cône est le tiers du cylindre de même base et de même hauteur.

Proposition XXXVI. — Une sphère quelconque est quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère, et une hauteur égale au rayon de cette même sphère.

Proposition XXXVII. — Un cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de cette sphère est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et la surface de ce cylindre, les bases étant comprises, est aussi égale à trois fois la moitié de celle de cette même sphère.

Cette propositon n'est que la conséquence des précédentes, en raison de ce qui est supposé établi antérieurement et admis, Archimède ne la démontre pas.

Proposition XXXVIII. — La surface d'un segment sphérique quelconque est égale à un cercle qui a pour rayon une droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Proposition XL. — Un secteur quelconque d'une sphère est égal à un cône qui a une base égale à la surface du segment sphérique qui est dans le secteur, et une hauteur égale au rayon de cette sphère.

Le second livre du *Traité de la sphère et du cylindre* ne contient que les solutions de problèmes d'une grande difficulté, eu égard aux moyens dont pouvait disposer Archimède, et que, du reste, il n'a pas tous résolus.

Voici les énoncés des principaux :

Proposition IV. — Couper une sphère par un plan, de manière que les surfaces des segments aient entre elles une raison donnée.

Proposition V. — Couper une sphère donnée, de manière que les segments aient entre eux une raison donnée.

En appelant h la distance du centre à la base commune des deux segments et $\frac{m}{n}$ le rapport donné du petit au grand segment, le problème revient à la résolution de l'équation

$$h^3 - 3R^2h + 2R^3\frac{n-m}{n+m} = 0,$$

qui a ses trois racines réelles. La solution ne pouvait donc pas être obtenue à l'aide de la règle et du compas. Aussi Archimède n'en donne-t-il pas la construction; mais il ramène le problème à partager le diamètre en deux parties telles, que le carré du diamètre soit au carré construit sur le plus grand segment comme le plus petit segment augmenté du rayon est à la ligne formée de n parties du rayon divisé en n plus m parties égales. *Chacune de ces choses aura à la fin,* dit-il, *sa solution et sa construction;* mais il n'en a plus reparlé. Nous ne citons ce problème que pour

montrer avec quel art Archimède maniait les transformations algébriques.

M. Poinsot a remarqué le premier que les deux solutions étrangères se rapportent à l'hyperboloïde de révolution conjugué de la sphère, ayant pour axe le diamètre perpendiculairement auquel on voulait mener le plan sécant.

Des conoïdes et des sphéroïdes.

Archimède appelle *sphéroïdes* les corps engendrés par l'ellipse tournant autour de l'un de ses axes, et *conoïdes* les corps engendrés par une hyperbole tournant autour de son axe transverse, ou par une parabole tournant autour de son axe.

« Si un cône est coupé par un plan qui rencontre tous les côtés, la section sera un cercle ou une ellipse; si la section est une ellipse, la figure retranchée du côté du sommet sera appelée un segment de cône. La base du segment sera le plan compris par l'ellipse; son sommet sera le sommet du cône, et son axe sera la ligne droite menée du sommet du cône au centre de l'ellipse. »

« Si un cylindre est coupé par deux plans parallèles, qui rencontrent tous les côtés du cylindre, les sections seront des cercles ou des ellipses égales. Si les sections sont des ellipses, la figure comprise entre les plans parallèles sera un segment de cylindre; la base du segment sera l'un des plans compris dans les ellipses, et son axe sera la droite qui joint les centres des ellipses et qui fait partie de l'axe du cylindre. »

Il semblerait que, dans ces passages, Archimède n'entend parler que du cylindre et du cône de révolution; mais il n'en est

évidemment rien, puisque, sans revenir sur ce sujet, il introduit, dans les énoncés des théorèmes relatifs aux segments des conoïdes et des sphéroïdes, des segments de cônes à bases circulaires, mais obliques, coupés par des plans perpendiculaires aux plans de symétrie de ces cônes.

Je crois que, pour bien comprendre la pensée d'Archimède, il faut supposer qu'il ne reconnaît pas comme bien défini un cône dont on donne le sommet et la base elliptique, hyperbolique ou parabolique.

Il lui faut la base circulaire de ce cône pour le bien définir, comme il la lui faudrait pour le bien construire.

Le cône, prolongé jusqu'à sa base circulaire, est un vrai cône, tandis que, terminé à sa base elliptique, par exemple, ce n'est qu'un segment de cône.

Cela tient à ce qu'Archimède ne recherche jamais la mesure d'aucune surface ni d'aucun volume, mais le moyen de construire des surfaces ou des volumes plus simples que les proposés, comme figure, et cependant équivalents.

Par exemple, dans la question du segment d'un conoïde hyperbolique ou d'un sphéroïde, ce qu'il cherche c'est le moyen de construire un corps plus simple que ce segment, mais ayant même volume, et il lui paraît que, pour arriver au segment de cône, il faut passer par le cône, parce qu'on peut faire construire un cône et le couper ensuite, tandis qu'on ne pourrait pas faire construire un segment de cône.

Archimède appelle *diamètre d'un segment d'une parabole* une droite qui coupe en parties égales toutes les parallèles à la base, et, plus spécialement, la portion de cette droite comprise dans le segment.

Il appelle *axe d'un segment de conoïde* ou *de sphéroïde* la droite qui va du centre de la base du segment au point de contact du plan tangent au conoïde, parallèle à la base du segment.

Proposition IV. — Si d'une parabole on retranche deux segments qui aient des diamètres égaux, ces segments seront égaux.

Proposition V. — La surface comprise dans l'ellipse est au cercle décrit sur le grand axe comme le petit axe est au grand axe.

Proposition VI. — La surface comprise dans l'ellipse est à un cercle quelconque comme la surface comprise sous les deux axes de l'ellipse est au carré du diamètre du cercle. (La surface comprise sous deux droites est le rectangle qui a pour côtés ces deux droites.)

Proposition VII. — Les surfaces comprises dans deux ellipses sont comme les surfaces comprises sous leurs axes.

Archimède s'occupe, dans les propositions suivantes, de déterminer la base circulaire d'un cône oblique contenant une ellipse donnée et dont le sommet soit un point donné, dans le plan mené par le grand axe de l'ellipse perpendiculairement à son plan.

Proposition XI. — « Il a été démontré par ceux qui ont vécu avant nous que deux cônes (il s'agit ici de cônes droits ou obliques, mais à bases circulaires) sont entre eux en raison composée des bases et des hauteurs. On démontrera de même que deux segments quelconques de cônes (c'est-à-dire deux cônes à bases elliptiques) sont entre eux en raison composée des bases et des hauteurs. On démontrera aussi qu'un segment quelconque de cylindre est triple du segment de cône qui a la même base et la même hauteur. »

Proposition XII. — « Si un conoïde parabolique est coupé

par un plan parallèle à l'axe, la section sera une parabole égale à la parabole génératrice.

« Si un conoïde hyperbolique est coupé par un plan parallèle à l'axe, la section sera une hyperbole semblable à l'hyperbole génératrice.

« Si un sphéroïde est coupé par un plan parallèle à l'axe, la section sera une ellipse semblable à l'ellipse génératrice.

« Les démonstrations de toutes ces propositions sont connues. »

Proposition XIII. — Si un conoïde parabolique est coupé par un plan oblique à l'axe, la section sera une ellipse dont le grand diamètre (l'axe) sera la section du plan sécant par celui qui, lui étant perpendiculaire, passe par l'axe, et le petit diamètre sera égal à l'intervalle des droites menées parallèlement à l'axe par les extrémités du grand diamètre.

Proposition XIV. — Si un conoïde hyperbolique est coupé par un plan qui rencontre tous les côtés du cône asymptote, la section sera une ellipse; son grand diamètre sera la section du plan coupant par celui qui, lui étant perpendiculaire, passe par l'axe.

Proposition XV. — Si un sphéroïde allongé est coupé par un plan, la section sera une ellipse. L'un de ses diamètres (axes) sera la section du plan coupant par celui qui, lui étant perpendiculaire, passe par l'axe.

Archimède, dans ces trois propositions, fait voir que le carré construit sur la perpendiculaire abaissée d'un point de la section sur le premier diamètre (l'axe de la section qui rencontre l'axe de la surface) est à la surface comprise sous les deux segments de ce diamètre, dans un rapport constant, qu'il détermine. On croi-

rait qu'il va employer l'équation de l'ellipse

$$y^2 = k(a - x)(a + x).$$

Proposition XXIII. — Un segment quelconque d'un conoïde parabolique, retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, est égal à trois fois la moitié du segment du cône qui a la même base et le même axe que le segment.

Proposition XXIV. — Même théorème pour un segment retranché par un plan oblique à l'axe du conoïde.

Proposition XXV. — Si deux segments d'un conoïde parabolique sont retranchés par deux plans dont l'un soit perpendiculaire sur l'axe et l'autre oblique, et si les axes des segments sont égaux, les segments seront aussi égaux.

Proposition XXVI. — Si deux segments d'un conoïde parabolique sont retranchés par des plans conduits d'une manière quelconque, ces segments sont entre eux comme les carrés de leurs axes.

Proposition XXVIII. — Un segment d'un conoïde hyperbolique est au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment (c'est-à-dire au cône qui a pour base la section faite par le plan sécant et pour sommet le point de contact du plan tangent parallèle) comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe (la droite ajoutée à l'axe est la distance au centre du conoïde du sommet du segment, ou du point de contact du plan tangent mené parallèlement à la base) est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe.

Proposition XXX. — La moitié d'un sphéroïde coupé par

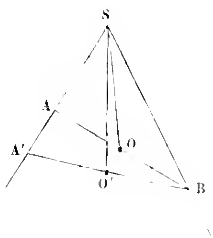
un plan passant par le centre est double du segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment.

Proposition XXXII. — Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre, le plus petit segment sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des deux segments (c'est le diamètre qui joint les points de contact des plans tangents parallèles au plan sécant) et de l'axe du petit segment est à l'axe du grand segment.

Il nous paraît important de compléter, à l'égard de ces théorèmes, la pensée d'Archimède en faisant concourir à leur interprétation tout l'ensemble de son œuvre.

Prenons, par exemple, l'énoncé de la proposition XXVIII; voici ce qu'il signifie: Supposons qu'on ait construit en bois, par exemple, un conoïde hyperbolique et qu'on ait séparé un segment de ce conoïde par un trait de scie : la base sera une ellipse dont on pourra tracer les deux axes dans le plan du trait; soient AB (*fig.* 5) le grand axe, CD le petit axe et O le centre; le segment

Fig. 5.



étant d'ailleurs posé sur une table plane, de façon que la base

repose sur cette table, on pourra déterminer le sommet S du segment en menant à la surface convexe de ce segment un plan tangent parallèle au plan de la table ; le triangle SAB pourra alors être construit et, le petit axe CD de l'ellipse contenue dans le plan mené par AB perpendiculairement à SAB étant connu, on pourra construire (comme il le montre dans la proposition IX) la trace BA′ du plan dans lequel il faudrait décrire un cercle ayant BA′ comme diamètre, pour que le cône ayant pour sommet S et pour base le cercle décrit sur BA′ comme diamètre, contînt l'ellipse ABCD.

Soit O′ le centre de ce cercle; on pourra construire en bois, par exemple, le cône oblique ayant le cercle BA′ pour base et O′S pour axe.

Ce cône étant construit, on le coupera par le plan AB, et l'on aura le segment de cône dont il est question dans l'énoncé.

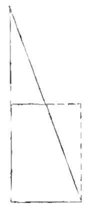
On pourrait substituer à ce segment de cône le tiers d'un cylindre ayant pour base l'ellipse ABCD et pour axe SO, mais il vaudra mieux couper en trois parties égales, parallèlement à la base, le cylindre qui, ayant toujours pour base l'ellipse ABCD et pour axe indéfini SO, aurait pour longueur d'une de ses arêtes une quatrième proportionnelle à une droite composée de OS et du double de la droite ajoutée à l'axe, à une droite composée de OS et du triple de la droite ajoutée à l'axe, et enfin à OS.

Ce cylindre oblique, ou segment de cylindre (à bases elliptiques parallèles) aura même volume que le segment du conoïde.

Mais, d'après la proposition VI, puisque une ellipse est égale à un cercle dont le diamètre est moyen proportionnel entre les axes de cette ellipse, on pourra remplacer le cylindre à bases elliptiques par un cylindre à bases circulaires ; on pourra même

rendre droit ce cylindre (comme l'ont enseigné ceux qui ont écrit auparavant); enfin, puisque un cercle est égal à un triangle rectangle ayant pour base le rayon et pour hauteur la circonférence, on pourra remplacer le cylindre droit à base circulaire par un

Fig. 6.



prisme droit à base triangulaire, et ce dernier corps par un parallélépipède rectangle, en coupant le triangle (*fig.* 6) par une parallèle à sa base à la moitié de la hauteur et ramenant le petit triangle séparé à côté du trapèze restant.

Tout cela paraît merveilleux, et cependant Archimède n'emploie que juste les mêmes procédés qui lui ont servi pour la théorie relative aux segments sphériques.

Il coupe les segments de conoïdes hyperboliques ou de sphéroïdes par des plans équidistants, menés parallèlement aux bases, et sur les sections comme bases il construit des cylindres obliques, parallèles à l'axe du segment. Les sections sont des ellipses, mais ces ellipses ne sont que des cercles dont le petit axe est raccourci. Les grands axes de ces ellipses ne varient pas comme les cordes équidistantes et parallèles d'un cercle, mais elles sont à ces cordes dans un rapport constant; quant aux axes des cylindres et du segment, ils ne sont pas perpendiculaires aux plans des bases,

mais leur obliquité est conservée dans le segment de cône équivalent.

Les segments de conoïdes hyperboliques ou de sphéroïdes peuvent donc, moyennant trois corrections distinctes, être assimilés aux segments sphériques.

Quant aux segments de conoïdes paraboliques, la question est naturellement plus simple, et nous n'en parlons pas.

Traité des Hélices.

Le *Traité des Hélices* présente peu d'intérêt aujourd'hui, parce qu'il se rapporte à une question spéciale n'ayant de rapport nécessaire avec aucune autre; mais les solutions des problèmes que s'y pose Archimède ne sont pas moins remarquables que celles des questions qu'il envisage dans ses autres traités.

L'hélice est la courbe engendrée par un point qui se meut sur une droite d'un mouvement uniforme, tandis que cette droite tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour d'un de ses points.

Archimède démontre que la tangente à l'hélice en un de ses points rencontre la perpendiculaire au rayon vecteur tiré vers ce point, à une distance du point origine égale à l'arc du cercle décrit du point origine comme centre et passant par le point de contact, qui est compris entre ce point de contact et le rayon origine.

Il démontre en second lieu qu'un secteur de l'hélice, compris entre deux rayons vecteurs, est au secteur, compris entre les

mêmes droites, du cercle décrit du point origine comme centre avec un rayon égal au plus grand des deux rayons vecteurs, comme le rectangle des deux rayons vecteurs ajouté au tiers du carré de la différence de ces mêmes rayons est au carré du plus grand rayon.

Traité de l'équilibre des plans ou de leurs centres de gravité.

LIVRE PREMIER.

Dans la première Partie, Archimède établit la théorie du levier, savoir : que des graves sont en équilibre lorsqu'ils sont réciproquement proportionnels aux longueurs auxquelles ils sont suspendus.

Dans la seconde Partie, il détermine les centres de gravité du parallélogramme, du triangle et du trapèze.

LIVRE SECOND.

Archimède s'y occupe de la détermination du centre de gravité d'un segment de parabole; il trouve, proposition VIII, que le centre de gravité d'un segment de parabole à une base est dans le diamètre de ce segment et le partage de manière que la partie qui est vers le sommet est égale à trois fois la moitié de la partie qui est vers la base.

Il démontre ensuite, proposition X, que le centre de gravité d'un segment parabolique à deux bases parallèles est dans le diamètre, et que, si la portion du diamètre comprise entre les bases est divisée en cinq parties égales, le centre de gravité est dans la partie moyenne, au point qui la divise, de façon que la portion qui

est plus près de la petite base soit à l'autre portion comme un solide ayant pour base le carré construit sur la moitié de la grande base et pour hauteur le double de la petite base augmenté de la grande, est à un solide ayant pour base le carré construit sur la moitié de la plus petite base et pour hauteur le double de la grande base augmenté de la petite.

Dans cette proposition X, Archimède considère le segment à deux bases comme la différence de deux segments à une base, et trouve par un art admirable la règle si simple que nous venons de transcrire et à laquelle on n'arriverait encore aujourd'hui que difficilement par transformation de la formule de l'abscisse du centre de gravité du segment, car il y a pour cela à supprimer, aux deux termes du rapport cherché, un facteur trinôme du second degré commun, qu'on n'apercevrait pas facilement si l'on n'était prévenu de sa présence.

Quant à la proposition VIII, il la démontre en substituant au segment considéré une figure polygonale qu'il appelle *régulière*, et qu'il forme de la manière suivante : Il inscrit d'abord dans le segment un triangle ayant même base et même sommet, puis dans chaque nouveau segment un nouveau triangle ayant même base et même sommet que lui, et ainsi de suite.

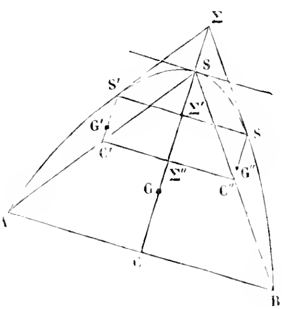
La théorie se réduit alors essentiellement à la proposition V : Si, dans un segment compris par une droite et une parabole, on inscrit régulièrement une figure rectiligne, le centre de gravité du segment est plus près du sommet que le centre de gravité de la figure rectiligne; à la proposition VI : Un segment compris par une droite et par une parabole étant donné, on peut lui inscrire régulièrement une figure rectiligne, de manière que la droite qui est entre le centre de gravité du segment et celui de

la figure rectiligne soit plus petite que toute droite proposée; enfin à la proposition VII : Les centres de gravité de deux segments semblables compris par une droite et par une parabole coupent leurs diamètres dans la même raison.

Archimède s'était déjà servi de l'équivalent de cette dernière proposition dans la théorie du centre de gravité d'un triangle; mais dans cette théorie le principe était évident, les triangles considérés étant alors véritablement semblables (c'était le triangle proposé et, par exemple, celui qu'on en sépare, du côté du sommet, par une parallèle à la base menée à la moitié de la hauteur), tandis que, si l'on veut bien supposer que dans la proposition VII les segments considérés sont effectivement semblables, en réalité Archimède applique ensuite cette proposition VII à des segments qui ne le sont pas du tout.

Ainsi il suppose que le centre de gravité d'un segment parabolique et les centres de gravité des segments que l'on obtient en

Fig. 7.



joignant le sommet du premier aux extrémités de sa base divisent les diamètres respectifs de ces trois segments en parties

proportionnelles, c'est-à-dire que G, G′ et G″ (*fig.* 7) sont semblablement placés sur SC, S′C′ et S″C″, ce qui n'est pas démontré.

La lacune est, il est vrai, facile à combler : Archimède suppose évidemment démontré, ce qui le sera dans le *Traité de la quadrature de la parabole*, que le triangle inscrit dans un segment de parabole est les $\frac{3}{4}$ du segment de la parabole. Le triangle ASB étant en effet supposé égal aux $\frac{3}{4}$ du segment ASB, la somme des deux segments secondaires AS′S et BS″S est égale au quart de ce segment ASB; mais ces deux segments sont égaux : chacun d'eux est donc le huitième du premier; les triangles secondaires sont donc chacun les trois quarts du huitième du premier segment, et ainsi de suite ; de sorte que dans deux segments semblables, ou non semblables, de paraboles, les figures rectilignes régulièrement inscrites et d'un même nombre de côtés sont toujours composées de suites de triangles, disposés analogiquement, et dont les surfaces (quand on compare les triangles de même rang) sont dans un rapport constant. D'un autre côté, tous les diamètres d'une parabole étant parallèles entre eux, les médianes de tous les triangles successifs sont parallèles entre elles ; d'ailleurs les médianes de deux triangles de même rang, dans les deux figures régulièrement inscrites, ont entre elles un rapport constant ; car, par exemple, S′S″ étant parallèle à AB, ainsi que C′C″, S′C′ est égale à S″C″ et par suite à SΣ ou à SΣ′, d'après les propriétés connues de la parabole ; S′C′ et S″C″ sont donc les moitiés de SΣ″ ; mais SΣ″ est la moitié de SC, par conséquent S′C′ et S″C″ sont chacune le quart de SC.

Enfin les médianes de tous les triangles composant les deux figures régulièrement inscrites étant divisées toutes en parties proportionnelles par les centres de gravité de ces triangles, et ces

médianes étant d'ailleurs toutes portées à des hauteurs proportionnelles au-dessus des bases des deux segments primitifs et rencontrant aussi les bases à des distances proportionnelles de leurs milieux respectifs, il en résulte bien que, s'il n'y a pas similitude effective, l'analogie existante en présente du moins tous les caractères, les angles seuls étant changés.

Il est bon de remarquer ici qu'autant Archimède s'étudiait à pousser la rigueur jusqu'aux dernières limites dans ses *Traités de la sphère et du cylindre, des hélices et des conoïdes*, autant il est concis dans ses *Traités de l'équilibre des plans*, *de la quadrature de la parabole* et de *la mesure du cercle.* C'est sans doute que ces traités sont destinés à des lecteurs moins nombreux et plus choisis.

Cependant j'ai peine à croire qu'Archimède ait appelé semblables des figures qui ne le sont pas; peut-être le mot *semblable* a-t-il été introduit par les copistes au lieu d'un autre mot analogue; peut-être, plutôt, quelques propositions manquent-elles dans le texte qui nous est parvenu ?

Quoi qu'il en soit, voici comment Archimède achève la détermination du centre de gravité du segment de parabole à une base.

Après y avoir inscrit un premier triangle, il considère le segment primitif comme composé de ce triangle et des deux segments secondaires; il connaît le centre de gravité du triangle; et les centres de gravité des trois segments devant diviser leurs diamètres respectifs en parties proportionnelles, comme il faut d'ailleurs que la composition du poids des trois parties du premier segment fasse retrouver le centre de gravité de ce segment, il en résulte une condition suffisante.

De la quadrature de la parabole.

Nous avons déjà dit que les ouvrages d'Archimède que nous possédons sont les dernières copies qu'il en ait envoyées, et qu'il retoucha plusieurs fois quelques-uns d'entre eux. Le *Traité de la quadrature de la parabole* en offre une nouvelle preuve.

Il est évident qu'Archimède était en possession de son théorème sur le rapport des surfaces d'un segment de parabole et du triangle inscrit, lorsqu'il composait le second livre de son *Traité de l'équilibre des plans*, où il s'agit du centre de gravité d'un segment de parabole. Mais il est évident aussi qu'il avait achevé le premier livre du *Traité de l'équilibre des plans*, lorsqu'il entama le problème de la quadrature de la parabole ; car c'est par des considérations mécaniques qu'il parvint d'abord à résoudre ce problème.

Il est probable que, peu satisfait de la méthode détournée par laquelle il y avait été conduit, il s'est ensuite occupé simultanément du second livre du *Traité de l'équilibre des plans* et de la seconde partie du *Traité de la quadrature de la parabole*.

Quoi qu'il en soit, nous allons analyser les deux solutions que donne successivement Archimède du problème de la quadrature de la parabole.

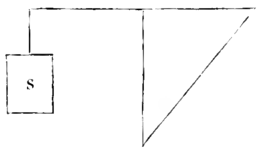
Première solution.

Après avoir rappelé quelques propriétés de la parabole qui se trouvent, dit-il, dans les éléments, et notamment que les carrés des demi-cordes d'une parabole parallèles à la base d'un segment sont entre eux comme les distances des pieds de ces cordes sur leur

diamètre commun, à l'extrémité de ce diamètre, Archimède établit, propositions VI à XIII, les conditions d'équilibre d'une surface donnée S suspendue à l'extrémité gauche, par exemple, d'une balance à bras égaux et d'un trapèze (qui peut se réduire à un triangle) ayant ses bases perpendiculaires au fléau de la balance et attaché au bras droit de la balance aux points de rencontre de ce bras avec les bases du trapèze.

Par exemple, si le trapèze se réduit à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit ait la longueur de l'un des bras de la balance, le sommet de l'angle droit étant d'ailleurs au point fixe

Fig. 8.



du levier, le triangle est le triple de la surface S (*fig.* 8), puisque son centre de gravité est à une distance trois fois moindre du point fixe.

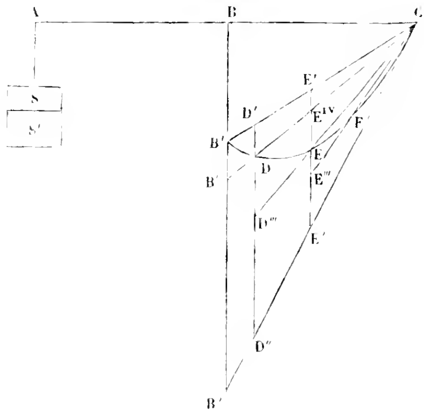
Ces conditions étant établies, Archimède considère un segment parabolique dans un plan vertical, et le dirige de façon que les diamètres de la parabole à laquelle il appartient soient verticaux.

Soit B'MC ce segment (*fig.* 9); il prend C pour extrémité du fléau de droite d'une balance à bras égaux, et place le point fixe sur la verticale de B'; le segment est ainsi suspendu au bras droit de la balance.

Archimède divise ce segment en secteurs par les rayons CD,

CE, . . . et mène la tangente en C, qui est le dernier rayon vecteur.

Fig. 9.



Il suspend alors à l'extrémité du fléau de gauche, c'est-à-dire en A, des surfaces S, S′, . . . , qui fassent respectivement équilibre aux trapèzes B′D′D″B″, D′E′E″D″, ...

Le triangle B′CB″ est alors triple de la surface S + S′ + ...

Mais il démontre que S est comprise entre zéro et le trapèze B′D′DB‴; que S′ est comprise entre les deux trapèzes D′E′E$^{\text{IV}}$D et D′E′ED‴, ...

Or la surface du segment est aussi comprise entre la somme des trapèzes intérieurs et la somme des trapèzes extérieurs, et les deux sommes de trapèzes peuvent se rapprocher autant qu'on le veut de la surface du segment, sans que la multiplication des rayons vecteurs change rien à la somme des surfaces S, S′, S″, . . . qui doit faire équilibre au triangle fixe B′CB″. La somme de ces surfaces est donc égale à celle du segment, mais elle est le tiers du

triangle $B'CB''$; le segment est donc aussi le tiers de ce triangle.

Nous ne pouvons entrer dans les détails d'aucune des démonstrations du grand géomètre, et véritablement nous ne le voudrions pas : il faut les lire. Tout le monde peut vérifier l'exactitude des énoncés de ses théorèmes, mais ceux qui l'essayeront auront seuls une idée approximative de la grandeur de son génie.

Il y a dans chaque ensemble de propositions relatives à une même question traitée par Archimède quelque chose qui confond véritablement et qui étonne d'autant plus qu'on a mieux compris; on éprouve toujours, en le lisant, l'impression assez désagréable de sa propre infériorité.

« Ceux qui sont en état de comprendre Archimède, disait Leibniz, admirent moins les découvertes des plus grands hommes modernes. »

Je trouve que c'est au moins plus que vrai.

Deuxième solution.

La première solution offre tant d'attrait, à cause de sa singularité et parce qu'elle est moins parfaite, qu'elle nuira un peu à la seconde, qui, plus régulière, est en même temps meilleure.

Archimède commence encore par rappeler quelques propositions « établies par ceux qui ont vécu avant lui » ; puis, remarquant que le triangle inscrit dans un segment de parabole, c'est-à-dire ayant pour base la base du segment et pour sommet le point de contact de la tangente parallèle à la base, est plus grand que la moitié de ce segment, il en conclut que si l'on continue la formation de la figure polygonale régulièrement inscrite, la surface de cette figure pourra différer aussi peu qu'on le voudra de la surface du segment.

Si, dans un segment de parabole, on inscrit un triangle ayant pour base la base du segment et pour sommet le point de contact de la tangente parallèle à la base; si, dans les segments secondaires séparés, on inscrit des triangles déterminés de la même manière, puis dans les segments tertiaires des triangles encore déterminés suivant la même règle, etc., le premier triangle est octuple de l'un des suivants, l'un de ceux-ci octuple de l'un de ceux du troisième rang, et ainsi de suite; ainsi (*fig.* 10)

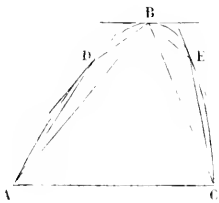
$$ABC = 8\,ADB$$

ou

$$ABC = 4\,ADB + 4\,BEC,$$

c'est-à-dire que chaque triangle, considéré comme primaire, est

Fig. 10.



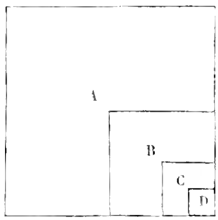
quadruple de la somme des deux triangles secondaires qui en dérivent.

Mais la somme totale des triangles inscrits se rapproche indéfiniment de la surface du segment. Cette surface du segment se compose donc du triangle inscrit, du quart de ce triangle, du quart du quart du même triangle, etc.; elle est donc égale aux quatre tiers de ce triangle.

Mais il ne faudrait pas croire qu'Archimède, pour arriver à cette dernière conclusion, se serve d'une règle connue de son temps : c'est la première fois que la question se présente; mais elle ne l'étonne pas plus qu'elle ne l'arrête. Voici comment il énonce le théorème : Si tant de grandeurs que l'on voudra sont placées à la suite les unes des autres et si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, la somme de ces grandeurs, conjointement avec le tiers de la plus petite, est égale à quatre fois le tiers de la plus grande. Il démontre cette proposition par la considération d'un carré, du carré construit sur la moitié du côté de ce carré, du carré construit sur la moitié de la moitié du côté du premier carré, et ainsi de suite.

Cette démonstration mérite d'être rapportée tout au long. Soient A, B, C, D.... (*fig.* 11) les grandeurs considérées, qui.

Fig. 11.



comme on le voit, sont des carrés dont les côtés sont chacun la moitié de celui du précédent, et soient S, S′, S″.... des surfaces qui soient respectivement les tiers de B, C, D....; S + B sera le tiers de A, S′ + C sera le tiers de B, S″ + D sera le tiers de C....; donc

$$B + C + D + \ldots + S + S' + S'' + \ldots$$

sera le tiers de

$$A + B + C + D + \ldots;$$

mais

$$S + S' + S'' + \ldots$$

est le tiers de

$$B + C + D + \ldots;$$

donc

$$B + C + D + \ldots$$

est le tiers de A, donc

$$A + B + C + D + \ldots$$

est les quatre tiers de A.

Il trouve toujours des inventions merveilleuses pour tourner toutes les difficultés qui se présentent.

Des corps qui sont portés sur un fluide.

Ce traité se compose de deux livres, dont le premier contient les principes d'Hydrostatique et leur application à l'équilibre d'un segment sphérique porté sur un fluide. et le second la théorie de l'équilibre d'un segment droit de conoïde parabolique porté sur un fluide.

Quelques parties du premier ont péri et le second ne contient pas les propositions dans lesquelles Archimède devait déterminer le centre de gravité d'un segment de conoïde parabolique. Archimède suppose que l'on sait que ce centre de gravité divise l'axe du segment au tiers de sa longueur à partir de la base. Il est probable que la question était traitée dans un livre qui

devait faire suite à l'*Équilibre des plans*, qui aurait pu être intitulé *Équilibre des solides*, et dont le titre même ne nous serait pas parvenu.

LIVRE PREMIER.

Hypothèse I. — On suppose que la nature d'un fluide est telle que, ses parties étant également placées et continues entre elles, celle qui est moins pressée est chassée par celle qui l'est davantage. Chaque partie du fluide est pressée par le fluide qui est au-dessus suivant la verticale, soit que le fluide descende quelque part, soit qu'il soit chassé d'un lieu dans un autre.

Proposition I. — Si une surface est coupée par un plan passant toujours par le même point et si la section est une circonférence de cercle ayant pour centre le point par lequel passe le plan coupant, cette surface est une surface sphérique.

Proposition II. — La surface de tout fluide en repos est sphérique, et le centre de cette surface sphérique est le même que le centre de la Terre.

Proposition III. — Si un corps, qui, sous un volume égal, a la même pesanteur qu'un fluide, est abandonné dans ce fluide, il s'y plongera jusqu'à ce qu'il n'en reste rien hors de la surface du fluide; mais il ne descendra point plus bas.

Proposition IV. — Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, une partie de ce corps restera au-dessus de la surface de ce fluide.

Proposition V. — Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume de liquide, égal au volume de la partie du corps qui est enfoncée, ait la même pesanteur que le corps entier.

Archimède démontre ces propositions en supposant une surface sphérique concentrique à la terre, mais placée au-dessous des corps considérés, et il fait voir que, pour que les pressions exercées verticalement sur les différentes parties de cette surface sphérique intérieure soient partout égales, il faut que les choses se passent comme il l'a dit dans chaque énoncé.

Proposition VI. — Si un corps plus léger qu'un fluide est enfoncé dans ce fluide, ce corps remontera avec une force d'autant plus grande qu'un volume égal du fluide sera plus pesant que ce corps.

Archimède emploie pour le démontrer cet ingénieux artifice : le corps considéré étant entièrement plongé, mais affleurant la surface du fluide, il le surmonte d'un autre corps dont le poids soit la différence de ceux du liquide déplacé et du corps. L'ensemble des deux corps est en équilibre, d'après la proposition V; par conséquent le premier corps, qui supporte le second, est soumis, de la part du liquide, à une force égale au poids du second.

Proposition VII. — Si un corps plus pesant qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il sera porté en bas jusqu'à ce qu'il soit au fond; et ce corps sera d'autant plus léger dans ce fluide, que la pesanteur d'une partie du fluide, ayant le même volume que ce corps, sera plus grande.

Cet énoncé ne paraît pas très clair. En réalité Archimède démontre dans cette proposition que le poids du corps plongé est la différence entre son poids hors du liquide et celui du liquide déplacé. Il se sert pour cela d'un artifice analogue à celui qu'il a employé dans la proposition précédente. Il lie au corps considéré un autre corps plus léger que le fluide et tel que l'excès du poids

du liquide qu'il déplace, sur son propre poids, soit égal à l'excès du poids du premier corps sur le poids du liquide qu'il déplace. Le système des deux corps est alors en équilibre ; mais puisque le second est poussé en haut (proposition VI), le premier est donc poussé d'autant en bas.

HYPOTHÈSE II. — Nous supposons que les corps qui, dans un fluide, sont portés en haut, le sont chacun suivant la verticale qui passe par leurs centres de gravité.

Dans les deux propositions suivantes, qui terminent le premier livre, Archimède démontre que si un segment sphérique plus léger qu'un liquide est en équilibre sur ce liquide, son axe sera vertical. Il ne détermine pas la position du cercle de flottaison, la question ayant sa solution dans le *Traité de la sphère et du cylindre*.

LIVRE SECOND.

Proposition I. — Si une grandeur solide quelconque plus légère qu'un fluide est abandonnée dans ce fluide, la pesanteur de cette grandeur sera à la pesanteur d'un volume égal du fluide comme la partie de cette grandeur qui est submergée est à la grandeur entière.

Cet énoncé n'est qu'une variante d'un des précédents.

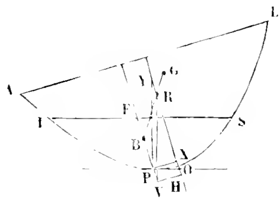
Proposition II. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique n'a pas son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, si ce segment, quelle que soit sa pesanteur par rapport à celle du fluide, est abandonné dans ce fluide, et s'il est posé incliné de manière que sa base ne touche point le fluide, il ne restera point incliné, mais il se placera verticalement.

Archimède entend par paramètre d'une parabole le quadruple de la distance du foyer au sommet.

La démonstration d'Archimède avait été perdue: celle qui se trouve dans toutes les éditions est de Commandin, mais elle a été calquée sur la suivante qui existait.

Archimède ne suppose dans cette démonstration aucun rapport connu entre les poids d'un même volume du liquide et du paraboloïde, parce qu'il lui suffit que la distance du centre de gravité R du segment considéré à son sommet O (*fig.* 12) soit moindre que

Fig. 12.



le demi-paramètre pour pouvoir affirmer que la verticale RT passera entre le sommet O et le sommet P du segment immergé IPS. En effet, si RO est moindre que p, soit RH $= p$, menons l'axe PF du segment immergé, abaissons HV perpendiculaire à FP et PX perpendiculaire à RO, puis menons la verticale PY et joignons RV.

XY sera la sous-normale correspondante au point P; elle sera donc égale à p et par suite à RH; d'un autre côté, les angles en X et H sont droits, par conséquent les triangles YPX et RVH seront égaux comme ayant les côtés de l'angle droit égaux : donc VR sera parallèle à PY, c'est-à-dire vertical. Mais puisque le point H est en dehors de la parabole, le point V est nécessairement

sur le prolongement de FP, donc la verticale du point R passe entre P et O.

Cela posé, le centre de gravité du segment immergé est au point B, qui divise FP au tiers de sa longueur à partir de F, et le centre de gravité de la partie AISL non immergée doit être quelque part sur le prolongement de BR, en G par exemple.

Cela étant, la partie immergée, dit Archimède, sera donc portée en haut, et la partie non immergée portée en bas; le segment ne restera donc pas en équilibre.

En d'autres termes, puisque la verticale RV laisse à sa gauche le point P, à plus forte raison y laissera-t-elle le point B, tandis que G sera à sa droite. Les trois points B, R et G n'étant donc pas sur une même verticale, l'équilibre sera impossible.

Cette proposition est une merveille, mais peut-être la sobriété d'Archimède en rend-elle un commentaire indispensable.

Il est évident, en effet, que la condition que RO fût moindre que le demi-paramètre ne serait pas nécessaire pour que l'équilibre fût impossible, si l'inclinaison de l'axe du segment de conoïde par rapport à l'horizon était donnée; car si RO était égal au demi-paramètre, la ligne HV étant alors tirée du point O, n'en rencontrerait pas moins FP en dehors de la parabole.

Mais Archimède ne cherche pas la condition que RO devrait remplir pour une position donnée du segment du conoïde, et en supposant à ce conoïde une densité donnée par rapport au liquide, il donne la condition pour que l'axe du conoïde doive se redresser, quelle que soit son inclinaison par rapport à la surface de niveau et quelle que soit la densité du conoïde, supposé seulement plus léger que le liquide.

Or cette condition est bien que RO soit inférieur au demi-

paramètre. Car, d'une part, si l'axe du conoïde faisait un angle suffisamment petit avec la verticale, pour peu que RO dépassât le demi-paramètre, le point V viendrait se placer au-dessus de P. D'un autre côté, si la densité du conoïde diminuait suffisamment, le point B se rapprocherait autant qu'on le voudrait de P; par conséquent il y aurait un moment où il tomberait en V; et la droite BRG étant alors verticale, l'équilibre serait possible.

Les démonstrations des propositions suivantes étant analogues à celle que nous venons de rapporter, nous nous bornerons aux énoncés.

Proposition III. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique n'a pas son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, si ce segment, quelle que soit sa pesanteur par rapport à celle d'un fluide, est abandonné dans ce fluide, si sa base est tout entière dans le fluide et s'il est posé incliné, il ne restera point incliné, mais il se placera de manière que son axe ait une position verticale. (On suppose, bien entendu, le conoïde plus léger que le fluide.)

Proposition IV. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, si la raison de la pesanteur de ce segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide n'est pas moindre que la raison du carré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au carré de l'axe; si ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base ne touche pas le fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera pas incliné, mais il se placera verticalement.

Proposition V. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois

fois la moitié du demi-paramètre; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas plus grande que la raison du carré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre, au carré de l'axe, si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est tout entière dans ce fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera pas incliné, mais il se placera de manière que son axe ait une position verticale.

Proposition VI. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme 15 est à 4; si, ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base touche la surface du fluide, il ne restera jamais incliné de manière que la base touche la surface du fluide en un seul point.

Proposition VII. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme 15 est à 4; si ce segment étant plongé dans le fluide a sa base entière dans le fluide, le segment ne restera jamais incliné de manière que sa base touche la surface libre du fluide en un point; mais cette base sera tout entière dans le fluide et ne rencontrera sa surface en aucune manière.

Proposition VIII. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme 15 est à 4; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du carré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre, au carré de l'axe; si, ce segment étant abandonné

dans le fluide, sa base ne touche point le fluide, son axe ne se placera pas verticalement, mais de manière à faire avec la surface du fluide l'angle d'un triangle rectangle ayant pour côtés

$$\sqrt{p\left[\tfrac{2}{3}h\left(1-\sqrt{\frac{P'}{P}}\right)-p\right]}$$

et

$$\tfrac{2}{3}h\left(1-\sqrt{\frac{P'}{P}}\right)-p,$$

qui serait opposé au premier de ces côtés; p désignant le demi-paramètre, h la hauteur du segment, P' et P les densités du conoïde et du fluide.

Cet énoncé, dont la traduction en langage ordinaire, au moyen d'un grand nombre de phrases superposées, se trouve littéralement dans Archimède, est tout à fait caractéristique.

Il me paraît impossible d'admettre qu'Archimède y soit parvenu, sous la forme simple qu'il lui donne dans sa démonstration synthétique, sans l'avoir trouvée analytiquement sous d'autres formes, qu'il n'a pu modifier que par des transformations algébriques exigeant une théorie en règle.

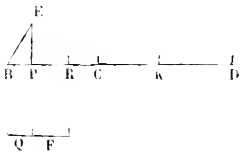
J'ai déjà dit que je crois que les grands géomètres grecs étaient en possession d'une méthode de calcul algébrique déjà très perfectionnée, dont ils n'ont laissé aucune trace dans leurs écrits, parce qu'ils n'ont pas voulu faire à part la théorie de ces procédés logistiques, soit qu'ils en regardassent la possession comme inhérente au génie et comme intransmissible par cela même, soit que n'ayant pas imaginé les signes auxquels nous recourons pour rendre nos formules saisissables, ils aient reculé devant la lon-

gueur des explications qu'ils auraient dû fournir en langage ordinaire, soit enfin qu'ils craignissent de n'être pas compris.

Je crois que si on lit attentivement l'énoncé d'Archimède on ne pourra pas penser autrement; voici cet énoncé :

Que BD (*fig.* 13) soit égal à l'axe; que BK soit double de KD; que RK soit égal au demi-paramètre et que CB soit égal à

Fig. 13.



trois fois la moitié de BR. Que la raison du carré de FQ (pour F + Q) au carré de DB soit la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide; que F soit double de Q et que RP soit égal à F; conduisons la droite PE perpendiculairement sur BD; que le carré de PE soit la moitié du rectangle compris sous KR et PB, et joignons BE. Il faut démontrer que si le segment est abandonné dans le fluide, il restera incliné de manière que l'axe fera avec la surface du fluide un angle égal à EBP.

C'est-à-dire :

Soient d'abord

$$BD = h, \quad BK = \tfrac{2}{3}h \quad \text{et} \quad RK = p,$$

d'où

$$BR = \tfrac{2}{3}h - p;$$

soit, en second lieu,

$$CB = \tfrac{3}{2}BR = h - \tfrac{3}{2}p,$$

d'où

$$\mathrm{CD} = h - h + \tfrac{3}{2}p = \tfrac{3}{2}p\,;$$

soient, en troisième lieu,

$$\frac{\overline{\mathrm{F}+\mathrm{Q}}^2}{h^2} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} \quad \text{et} \quad \mathrm{F} = 2\mathrm{Q},$$

d'où

$$\frac{9\mathrm{F}^2}{4h^2} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} \quad \text{et} \quad \mathrm{F} = \tfrac{2}{3}h\sqrt{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}}\,;$$

soit encore

$$\mathrm{RP} = \mathrm{F} = \tfrac{2}{3}h\sqrt{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}}\,;$$

d'où

$$\mathrm{BP} = \mathrm{BR} - \mathrm{RP} = \tfrac{2}{3}h - p - \tfrac{2}{3}h\sqrt{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}} = \tfrac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}}\right) - p\,;$$

enfin soit

$$\overline{\mathrm{PE}}^2 = p\left[\tfrac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}}\right) - p\right],$$

ou

$$\mathrm{PE} = \sqrt{p\left[\tfrac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}}\right) - p\right]}\,;$$

l'angle cherché sera l'angle B du triangle EBP.

Si grand que soit Archimède, on ne peut pas, je crois, admettre qu'il ait pu arriver sans analyse à la traduction en langage ordinaire, telle que nous l'avons rapportée, d'une pareille règle.

Il est déjà presque impossible de se passer du calcul algébrique pour suivre ses hypothèses et se rendre compte de son énoncé; que serait-ce donc pour y parvenir?

De toutes les choses incroyables entre lesquelles, pourtant, il faut bien choisir, en présence du fait, la plus croyable est encore, il me semble, qu'Archimède se servait pour lui-même d'une certaine algèbre et y était très versé.

Proposition IX. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais trop petit pour que la raison de l'axe au demi-paramètre soit la même que la raison de 15 à 4; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est plus grande que la raison de l'excès du carré de l'axe sur le carré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au carré de l'axe $\left[\text{c'est-à-dire si } \frac{P'}{P} > \frac{h^2 - (h - \frac{3}{2}p)^2}{h^2}\right]$; si, ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est tout entière dans le fluide, et s'il est posé incliné, il ne tournera pas de manière que son axe devienne vertical, mais son axe se placera de façon à faire avec la surface du fluide l'angle dont la tangente serait

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}p\left[\frac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{1 - \frac{P'}{P}}\right) - p\right]}}{\frac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{1 - \frac{P'}{P}}\right) - p}.$$

Proposition X. — Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique est plus léger qu'un fluide, et que la raison de son axe à trois fois la moitié du demi-paramètre est plus grande que la raison de 15 à 4; si, ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base ne touche point le fluide, il sera tantôt vertical et tantôt incliné; il sera quelquefois incliné, de manière que sa base touchera la surface du fluide en un seul point, et cela dans

deux positions différentes ; quelquefois sa base s'enfoncera davantage dans le fluide et quelquefois sa base ne touchera en aucune manière la surface du fluide, suivant la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide.

Archimède examine séparément tous les cas.

Résumé de la solution d'Archimède.

Cette solution ne se compose que de deux propositions ; mais il est vrai que la dernière occupe trente pages de l'édition de Peyrard. Cela tient d'abord à ce qu'Archimède recule toujours devant l'emploi des procédés d'abréviation que fournirait l'usage de mots définis, qui tinssent lieu de phrases entières ; ensuite, à ce qu'il n'a pas de signes pour noter les égalités par lesquelles il passe ; enfin à ce qu'il croit arriver à un plus grand degré d'évidence en décomposant toutes ses propositions, lorsque cela est possible. Ce mode d'exposition, en fait, est très fatigant.

Nous allons résumer la solution même d'Archimède, sans y rien changer que le langage, parlé ou noté ; sans doute elle y perdra le caractère prodigieux qu'on est tenté de lui attribuer, mais elle y gagnera ceux d'un modèle achevé de Géométrie moderne.

Tout, en effet, se trouve en germe dans la solution d'Archimède : éléments de Trigonométrie, éléments de Géométrie analytique et éléments d'Algèbre.

Soient (*fig.* 14)

BAC la section du segment de conoïde par le plan vertical mené par l'axe AO,

h la hauteur AO du segment,

B′A′C′ la partie plongée,

h' l'axe A′O′ de cette partie,

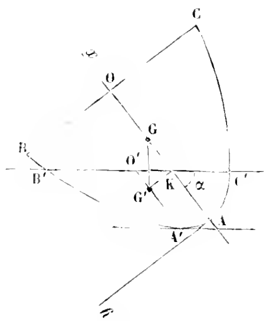
α l'angle que l'axe AO fait avec l'horizon, dans la position d'équilibre,

p le paramètre de la parabole,

G et G′ les centres de gravité du segment entier et du segment plongé dans le liquide,

Ay la tangente en A à la parabole de section BAC.

Fig. 14.



Il faut exprimer que GG′ fait avec Ay l'angle α, qui est aussi l'angle de la tangente en A′ à la parabole BAC avec l'axe AOx.

Soient a et b les distances du point A′ aux droites Ax et Ay; les distances des points G et G′ aux mêmes droites sont respectivement $\frac{2}{3}h$ et o, pour le premier; $a + \frac{2}{3}h'$ et b, pour le second.

Par conséquent

$$GK = a - \tfrac{2}{3}(h - h')$$

et

$$G'K = b;$$

la raison qui détermine l'angle α (c'est $\operatorname{tang}\alpha$) est donc

$$\frac{a - \frac{2}{3}(h - h')}{b};$$

mais cette raison est aussi $\frac{p}{b}$; et d'ailleurs

$$a = \frac{b^2}{2p}.$$

En conséquence, il vient, en appelant K la raison cherchée ($\operatorname{tang}\alpha$),

$$\frac{\frac{3}{2}(h - h') - \frac{p}{2K^2}}{\frac{p}{K}} = K;$$

d'où

$$p = \tfrac{2}{3}(h - h') - \frac{p}{2K^2}.$$

D'un autre côté les volumes du segment entier et de la partie plongée sont

$$\pi p h^2 \quad \text{et} \quad \pi p h'^2;$$

en désignant donc par P et P' les poids d'un égal volume du fluide et du segment de conoïde, on doit avoir

$$\frac{h^2}{h'^2} = \frac{P}{P'};$$

d'où

$$h' = h\sqrt{\frac{P'}{P}};$$

la condition d'équilibre est donc

$$p = \tfrac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{\frac{P'}{P}}\right) - \frac{p}{2K^2};$$

d'où

$$K = \operatorname{tang}\alpha = \frac{p}{\sqrt{2p\left[\frac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{\frac{P'}{P}}\right) - p\right]}}.$$

Pour que l'équilibre soit possible sans que l'axe soit vertical, il faut que

$$h > \frac{\frac{3}{2}p}{1 - \sqrt{\frac{P'}{P}}}.$$

On retrouve dans cette formule la condition énoncée dans la proposition II. En effet, si $\frac{P'}{P}$ était infiniment petit, il faudrait absolument que h dépassât $\frac{3}{2}p$.

La condition de réalité de $\operatorname{tang}\alpha$, exprimée par rapport à $\frac{P'}{P}$, donne

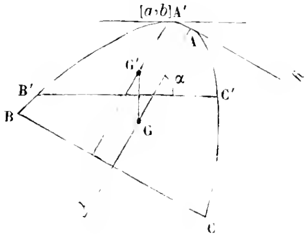
$$\frac{P'}{P} < \frac{(h - \frac{3}{2}p)^2}{h^2}.$$

C'est ce qu'exprime l'énoncé de la proposition IV : si le segment de conoïde a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre ($2p$), et si la raison de la pesanteur de ce segment

à la pesanteur d'un volume égal du fluide n'est pas moindre que la raison du carré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre, au carré de l'axe, l'équilibre sera impossible avec une direction inclinée de l'axe.

Du cas où la base du segment est entièrement plongée dans le liquide.

Fig. 15.



Le calcul est entièrement analogue : les coordonnées de G (*fig.* 15) sont $\frac{2}{3}h$ et o; celles de G' sont $a+\frac{2}{3}h'$ et b; la condition pour que GG' soit verticale est toujours

$$p = \tfrac{2}{3}(h-h') - \frac{p}{2}\cot\alpha;$$

seulement le volume du segment entier reste représenté par

$$\pi p h^2,$$

tandis que celui de la partie plongée devient

$$\pi p h^2 - \pi p h'^2;$$

et la condition que le poids du segment entier soit égal au poids du liquide déplacé devient

$$\pi p h^2 \mathrm{P}' = \pi p(h^2 - h'^2)\mathrm{P};$$

d'où

$$\frac{h'}{h} = \sqrt{1 - \frac{P'}{P}};$$

et, par suite, la condition d'équilibre devient

$$p - \tfrac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{1 - \frac{P'}{P}}\right) = \frac{p}{2}\cot^2\alpha;$$

d'où l'on tire la valeur de $\tan\alpha$ conforme à celle donnée par Archimède

$$\tan\alpha = \frac{p}{\sqrt{2p\left[p - \tfrac{2}{3}h\left(1 - \sqrt{1 - \frac{P'}{P}}\right)\right]}}.$$

De la mesure du cercle.

Ce Traité se compose des deux propositions I et III et d'un corollaire contenu dans la proposition II : *Un cercle est au carré construit sur son diamètre à peu près comme* 11 *est à* 14 ; car, ainsi que cela sera démontré (proposition III), la circonférence est, à peu de chose près, égale au triple du diamètre réuni au septième de ce diamètre.

Proposition I. — Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.

Archimède le démontre par les procédés employés dans le *Traité de la sphère et du cylindre*. Il est vraisemblable qu'il

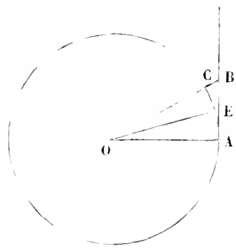
ait été en possession de ce théorème longtemps avant d'écrire son *Traité de la mesure du cercle.*

Proposition III. — La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une portion du diamètre, qui est plus petite que le $\frac{1}{7}$ de ce diamètre et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

C'est cette proposition qui ouvre, concurremment avec la proposition analogue d'Aristarque de Samos, une ère nouvelle, en introduisant, dans la Géométrie théorique, les recherches de rapports numériques non simples.

Archimède considère un cercle O (*fig.* 16), de rayon OA,

Fig. 16.



mène la tangente en A et la sécante OB, inclinée sur OA du tiers d'un angle droit, de sorte que la raison de OB à BA est 2.

Mais la raison dont il a besoin est celle de OA à AB. Pour l'obtenir, il transforme d'abord la raison 2 de OB à AB en celle de 306 à 153, par exemple; de sorte que, si AB était partagé en 153 parties égales, OB contiendrait 306 de ces parties; les carrés construits sur AB et OB contiendraient donc respectivement 23 409 (carré de 153) et 93 636 (carré de 306) petits carrés ayant pour côtés l'une des parties; mais alors le carré construit sur OA,

étant égal à la différence des carrés construits sur OB et sur AB, contiendrait 70 227 des mêmes petits carrés, c'est-à-dire plus de 70 225 (carré de 265); OA, lui-même, contient donc plus de 265 parties égales aux parties de AB.

La raison de OA à AB est donc plus grande que celle de 265 à 153.

C'est sous cette forme que se sont introduites, dans les questions de théorie pure, les méthodes de calculs numériques propres à fournir des rapports ou raisons incommensurables. C'est par application de cette méthode que les anciens sont arrivés à construire leurs tables des cordes, c'est-à-dire les tables des raisons de ces cordes au rayon du cercle.

Après avoir ainsi trouvé par défaut la raison de OA à BA, Archimède divise l'angle BOA en deux parties égales; et, en se servant de la propriété de la bissectrice d'un angle d'un triangle, il calcule de même, par défaut, la raison de OA à EA, puis divise encore l'angle EOA en deux parties égales et arrive enfin à la raison par défaut du rayon OA au contour d'un polygone circonscrit de 96 côtés. La raison ainsi approchée est celle de $4673\frac{1}{2}$ à 14 688.

Il calcule ensuite la raison, approchée par excès, du rayon au contour d'un polygone régulier inscrit de 96 côtés. Cette raison approchée est celle de $2017\frac{1}{4}$ à 6336.

Enfin il trouve que la circonférence d'un cercle est égale au triple de son diamètre augmenté d'une portion de son diamètre qui est plus petite que le $\frac{1}{7}$ de ce diamètre et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

L'Arénaire.

Quoique Archimède n'y ait eu en vue aucune utilité pratique, l'*Arénaire* n'en est pas moins très remarquable.

Archimède se propose de démontrer que l'infini n'est qu'une conception de l'esprit, et il prend pour exemple le nombre de grains de sable, très fins, que pourrait contenir une sphère ayant la Terre pour centre et allant jusqu'au Soleil, sphère dont il suppose le diamètre moindre que cent myriades de myriades de stades (le stade valant cent vingt-cinq pas environ).

C'est pour dénommer le grand nombre qu'il doit trouver qu'Archimède compléta la numération des Grecs.

Il paraît qu'il avait donné à ce sujet un traité à part, qu'il appelle le *Livre des principes ;* ce livre est perdu, mais l'*Arénaire* le remplace.

« Je pense, dit Archimède, qu'il est nécessaire à présent d'exposer les dénominations des nombres ; si je n'en disais rien dans ce livre (l'*Arénaire*), je craindrais que ceux qui n'auraient pas lu celui que j'ai adressé à Zeuxippe ne tombassent dans l'erreur.

« On a donné des noms aux nombres jusqu'à une myriade ; et, au delà d'une myriade, les noms qu'on a donnés aux nombres sont assez connus, puisqu'on ne fait que répéter une myriade jusqu'à dix mille myriades.

« Que les nombres dont nous venons de parler et qui vont jusqu'à une myriade de myriades soient appelés nombres premiers, et qu'une myriade de myriades des nombres premiers soit appelée l'unité des nombres seconds ; comptons par ces unités et

par les dizaines, les centaines, les mille, les myriades de ces mêmes unités, jusqu'à une myriade de myriades. Qu'une myriade de myriades des nombres seconds soit appelée l'unité des nombres troisièmes ; comptons par ces unités et par les dizaines, les centaines, les mille, les myriades de ces mêmes unités jusqu'à une myriade de myriades; qu'une myriade de myriades des nombres troisièmes soit l'unité des nombres quatrièmes; qu'une myriade de myriades des nombres quatrièmes soit appelée l'unité des nombres cinquièmes, et continuons de donner des noms aux nombres suivants jusqu'aux nombres huitièmes.

« Que les nombres dont nous venons de parler soient appelés les nombres de la première période et que le dernier nombre de la première période soit appelé l'unité des nombres premiers de la seconde période. De plus, qu'une myriade de myriades des nombres premiers de la seconde période soit appelée l'unité des nombres seconds de la seconde période; qu'une myriade de myriades des nombres seconds de la seconde période soit appelée l'unité des nombres troisièmes de la seconde période, et continuons de donner des noms aux nombres suivants, jusqu'à un nombre de la seconde période qui soit égal aux myriades de myriades de nombres composés de myriades de myriades (le texte ici doit être défectueux). De plus, que le dernier nombre de la seconde période soit appelé l'unité des nombres premiers de la troisième période, et continuons, etc. »

Cette nomenclature, comme on voit, n'est pas extrêmement régulière. Mais voici qui est plus intéressant :

« Il est encore utile de connaître ce qui suit. Si des nombres sont continuellement proportionnels à partir de l'unité, et si deux termes de cette progression sont multipliés l'un par l'autre,

le produit sera un terme de cette progression, éloigné d'autant de termes du plus grand facteur que le plus petit l'est de l'unité. Ce même produit sera éloigné de l'unité d'autant de termes moins un que les deux facteurs le sont ensemble de l'unité. »

C'est, comme on voit, le principe de la théorie des logarithmes; et au lieu de chercher le nombre des grains de sable contenus dans la sphère qu'il considère, Archimède va chercher le rang des plus hautes unités de ce nombre, c'est-à-dire la partie entière du logarithme de ce nombre.

Archimède substitue aux grains de sable des graines de pavot; il trouve qu'en les rangeant en ligne droite, de manière qu'elles se touchent, il en tient vingt-cinq dans la largeur d'un doigt de la main; il mesure l'angle sous lequel on voit le Soleil, en plaçant sur une règle horizontale devant l'astre, à son lever, un petit cylindre vertical qui le cache entièrement à l'œil, mais sans dépasser les bords, et il détermine l'angle sous lequel est vu le petit cylindre, du point où était l'œil. Il trouve que cet angle est plus petit que la 164^e^ partie d'un angle droit. Il admet que le contour de la Terre est à peu près de trois cents myriades de stades, et que le diamètre du Soleil est à peu près trente fois celui de la Terre. Il a ainsi tous les éléments du calcul du nombre des grains de sable, en tenant compte de la valeur de π, et trouve que le nombre cherché est moindre que mille unités des nombres septièmes.

Il va plus loin encore et suppose maintenant une sphère ayant pour centre la Terre et allant jusqu'aux étoiles fixes; il suppose que le diamètre de cette sphère est à celui de la précédente comme celui-ci est au diamètre de la Terre, et il démontre que le nombre des grains de sable contenus dans cette nouvelle sphère ne vaudrait pas le 64^e^ terme de la progression.

« Je pense, dit-il, que ces choses ne paraîtront pas très croyables à beaucoup de personnes qui ne sont point versées dans les sciences mathématiques ; mais elles seront démontrées pour ceux qui ont cultivé ces sciences et qui se sont appliqués à connaître les distances et les grandeurs de la Terre, du Soleil, de la Lune et du monde entier. »

Les Lemmes.

Ce Traité se compose de quinze propositions très curieuses, mais peu utiles. Nous remarquerons cependant les suivantes :

Proposition IV. — Si on divise le diamètre d'un demi-cercle en deux parties quelconques et qu'on décrive des demi-cercles sur ces parties, la surface comprise entre la demi-circonférence proposée et les deux demi-circonférences subsidiaires sera égale au cercle dont le diamètre serait la demi-corde du cercle proposé élevée perpendiculairement à son diamètre par le point de division de ce diamètre.

Proposition IX. — Si l'on mène dans un cercle deux cordes perpendiculaires entre elles, la somme des carrés de leurs quatre segments sera égale au carré du diamètre.

Des inventions d'Archimède.

Les anciens lui attribuaient quarante inventions mécaniques, sur la plupart desquelles nous manquons de détails, quoique, d'après Diodore, ses contemporains admirassent en lui l'ingénieur plus peut-être que le géomètre.

S'il n'a pas inventé la vis, comme on l'a dit, il en a, en tout cas, fait la belle application que l'on connaît, pour élever l'eau dans un cylindre tournant simplement autour de son axe. On croit que c'est à lui que sont dues l'invention de la vis sans fin et celle des moufles; mais c'est peu probable, au moins pour les moufles, qui sans doute étaient connues depuis lontemps.

APOLLONIUS DE PERGA.

[Né à Perga (Pamphilie) vers — 247.]

Nous traduisons sa biographie, écrite par Halley en tête de l'édition qu'il a donnée des *Coniques* du grand géomètre :

« Il étudia longtemps les Mathématiques à Alexandrie sous les disciples d'Euclide, et avait acquis une grande célébrité sous Philopator, qui mourut en — 205, d'où il est permis de conjecturer qu'il était plus jeune qu'Archimède d'environ quarante ans, qu'il précéda de peu d'années Géminus le Rhodien et qu'il était certainement antérieur à Hipparque.

« Géminus affirme qu'Apollonius, à cause de la beauté de son *Traité des coniques,* avait reçu des mathématiciens de son temps le titre de *grand géomètre.*

L'estime dans laquelle les anciens l'ont tenu n'est pas seulement prouvée par le témoignage de Vitruve, mais par ce fait qu'il eut, parmi les Grecs, plusieurs commentateurs d'un grand nom : Pappus, Hypathia, Sérenus et Eutocius; parmi les Orientaux, quelques hommes d'une grande valeur, tels que les Arabes Thébit ben Corah et Béni Moser, les Persans Abalphath et Ab-

dolmelec qui traduisirent ses ouvrages; enfin l'illustre Nassir-Eddin, qui réunit tout son *Traité des coniques* et l'enrichit de notes vers 1250.

« D'où il paraîtra étonnant que les ouvrages d'un auteur d'un si grand nom, et placé depuis bientôt deux mille ans au rang des plus grands géomètres, n'aient pas encore été publiés dans un siècle si éclairé.

« Outre les *Coniques*, Apollonius avait écrit beaucoup d'autres ouvrages, comme nous l'apprend Pappus dans la préface du septième livre de ses *Collections mathématiques ;* savoir : deux livres *De sectione rationis*, deux autres *De sectione spatii*, deux *De sectione determinata*, deux *De tactionibus,* deux *De inclinationibus,* un *Traité des lieux plans,* enfin un autre que loue beaucoup Eutocius dans son commentaire sur le livre *De la mesure du cercle* d'Archimède, qui paraît avoir eu pour objet le calcul arithmétique. et qui était très compliqué, les chiffres indiens n'étant pas encore inventés; un spécimen de ce calcul se trouve dans le second livre de Pappus et a été publié par Wallis. »

Le seul de ces derniers ouvrages qui soit parvenu jusqu'à nous est le traité *De sectione rationis*, qui a été retrouvé, traduit en arabe, et que Halley a publié en 1708. Les questions traitées dans les autres nous sont du moins connues par les commentaires de Pappus, en sorte que nous pourrons en rendre compte.

Enfin on sait encore qu'Apollonius avait écrit les ouvrages suivants, dont Halley ne parle pas : un livre *De cochleâ;* un autre *De perturbatis rationibus;* un troisième sur la *comparaison de l'icosaèdre et du dodécaèdre inscrits dans la même sphère*, et un dernier sur les *stations et rétrogradations des planètes,* dont Ptolémée tira quelques théorèmes qu'on trouve dans son *Almageste*.

Les quatre premiers livres seulement du *Traité des sections coniques* nous sont parvenus dans le texte grec ; les trois suivants ont été retrouvés dans un manuscrit arabe ; quant au huitième, il est perdu. Halley l'a rétabli d'après les indications de Pappus et d'Eutocius.

Nous commencerons par quelques mots sur les moindres ouvrages d'Apollonius.

Les deux traités *De sectione rationis* et *De sectione spatii*, dont les titres paraissent assez mal traduits, avaient pour objet les solutions des deux questions de mener, par un point pris dans le plan de deux droites, une transversale qui déterminât sur elles, à partir de deux points de l'une et de l'autre, des segments dont la raison fût donnée, ou dont le rectangle fût donné. (Le rectangle des deux segments est dit *espace* ou surface.) Nous avons dit que Halley avait traduit le premier de l'arabe ; il refit le second sur le modèle du premier.

Les deux livres *De sectione determinata* avaient pour objet la solution de ces problèmes : 1° Deux points A et B étant donnés sur une droite, en trouver un troisième P, tel que les carrés des distances PA et PB fussent dans un rapport donné, ou que le carré de l'une d'elles, PA par exemple, eût une raison donnée avec le rectangle compris sous l'autre PB et sous une donnée. 2° Trois points A, B, C étant donnés sur une droite, en trouver un quatrième P, tel que le carré de la distance à l'un des trois, A par exemple, fût en raison donnée avec le rectangle compris sous les distances aux deux autres B et C ; ou que le rectangle compris sous deux des distances, PA et PB par exemple, fût en raison donnée avec le rectangle compris sous la troisième distance PC et une donnée. 3° Quatre points A, B, C, D étant donnés sur une

droite, en trouver un cinquième P, tel que le rectangle compris sous ses distances à deux des quatre points fût en raison donnée avec le rectangle compris sous ses distances aux deux autres. Ce traité *De sectione determinata* a été restitué par Robert Simson.

Le traité *De tactionibus* avait pour principal objet la construction du cercle tangent à trois cercles donnés. Il a été restitué par Viète sous le titre d'*Apollonius Gallus*. Le même problème a, depuis, occupé Descartes, Fermat, qui résolut même celui de la sphère tangente à quatre sphères données; Newton, Euler Poncelet, Gauthier de Tours, et Gergonne, qui a trouvé une solution applicable à tous les cas.

Ce problème revient à la construction des points de rencontre de deux coniques qui ont un foyer commun, puisque le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés est une conique ayant pour foyers les centres de ces deux cercles. Mais la question était d'écarter l'emploi des lieux solides.

Le traité *De inclinationibus* contenait la solution de la question de mener d'un point donné une transversale dont la partie interceptée entre deux droites données, ou entre deux circonférences données, fût égale à une longueur donnée. Mais Pappus rapporte qu'Apollonius n'avait considéré que les cas les plus simples.

Le traité *De locis planis* a été restitué par Fermat, par Schooten et par Robert Simson.

C'est, à ce qu'il paraît, Apollonius qui, dans son *Traité des stations et rétrogradations des planètes*, aurait imaginé le système de l'épicycle et du déférent qu'adopta Ptolémée.

Nous allons maintenant donner une analyse aussi rapide que possible du grand *Traité des sections coniques*.

Mais nous commencerons par donner la traduction de la lettre

d'envoi du premier livre à Eudemus, à laquelle nous joindrons celle du commentaire qu'en a fait Eutocius; on y verra, comme nous l'avons dit ailleurs, où en était la théorie des coniques avant Apollonius.

Voici cette lettre et le commentaire :

Lettre d'envoi d'Apollonius à Eudemus du premier livre des Coniques.

« Si tu te portes bien et que tes affaires aillent comme tu le désires, cela est bien; quant à moi, je vais bien. Lorsque j'étais près de toi, à Pergame, j'ai su que tu désirais connaître ce que j'ai écrit des coniques. C'est pourquoi je t'envoie le premier livre corrigé; je t'enverrai les autres lorsque j'aurai du loisir, car je pense que tu n'as pas oublié comment je fus entraîné à les écrire, à la prière du géomètre Naucrates, lorsqu'il vint me voir à Alexandrie; ni comment, alors que je m'en occupais, aussitôt je fus obligé de les lui transcrire, sans les revoir, parce qu'il allait se mettre en voyage.

« C'est pourquoi, maintenant que j'ai le temps, je ne les répandrai qu'après les avoir corrigés, et c'est pourquoi, comme il est arrivé que quelques amis aient eu le premier et le second livre avant qu'ils fussent corrigés, ne t'étonne pas s'il t'arrive de tomber sur des passages qui soient présentés ailleurs autrement.

« Des huit livres, les quatre premiers contiennent les éléments de la théorie.

« Le premier livre contient la génération des trois sections coniques et de celles qui sont dites *opposées*, ainsi que leurs prin-

cipales propriétés, mais étudiées par moi plus abondamment et d'une manière plus générale que par les géomètres qui s'en étaient occupés précédemment.

« Le deuxième livre traite de ce qui se rapporte aux diamètres et aux axes des sections coniques, ainsi qu'à leurs asymptotes rectilignes. Il traite aussi des autres choses qui ont une utilité générale et nécessaire pour les questions déterminées. Tu verras, à la lecture de ce livre, ce que j'appelle *diamètres* et *axes*.

« Le troisième livre contient beaucoup et d'admirables théorèmes, qui seront utiles à la formation des lieux solides et à la solution des questions déterminées. Un grand nombre sont beaux et nouveaux. J'ai compris, en écrivant ce livre, que la règle pour former le lieu à trois et à quatre lignes n'ait été donnée par Euclide que dans un cas particulier, et encore pas très heureusement. Il ne se pouvait pas, en effet, que cette règle fût parfaitement établie, indépendamment de ce que j'ai trouvé.

« Le quatrième livre traite des intersections des coniques entre elles, avec le cercle et avec les sections opposées, et de beaucoup d'autres choses dont aucune n'avait été dite par aucun de ceux qui m'ont précédé.

« Les quatre derniers livres touchent à la plus haute science.

« Le cinquième traite en grande partie des maximum et minimum (les lignes qu'Apollonius appelle *maximum* et *minimum* sont les normales aux coniques); le sixième, des conditions d'égalité et de similitude des sections coniques; le septième contient les théorèmes qui donnent le moyen de résoudre les questions déterminées; le huitième contient les solutions des problèmes déterminés.

« Mais, au reste, cet ouvrage étant répandu, il sera permis à chacun d'en juger selon son sentiment.

« Porte-toi bien. »

Commentaire d'Eutocius.

« Apollonius, le géomètre, est né à Perga, ville de Pamphilie, du temps de Ptolémée Évergète, comme le rapporte Héraclius, dans la vie d'Archimède. Mais Héraclius dit aussi qu'Archimède aurait le premier attaqué la théorie des coniques et que, Apollonius ayant retrouvé les mêmes choses les aurait publiées comme de lui, Archimède ne les ayant pas rendues publiques. Cela, il me semble, n'est pas exact; car Archimède, en bien des endroits, fait mention de l'antique théorie des coniques, et Apollonius la reproduit, non comme inventée par lui-même; en effet, autrement il n'aurait pas dit que cette théorie avait été traitée par lui plus abondamment et plus généralement que par ceux qui avaient écrit avant lui.

« Mais ce que dit Géminus est parfaitement vrai, que les anciens définissaient le cône comme formé par la révolution d'un triangle rectangle tournant autour d'un des côtés de l'angle droit, et qu'ils ne considéraient qu'une seule section dans chaque cône, savoir : la parabole dans le cône rectangle (c'est-à-dire engendré par la révolution d'un triangle rectangle isoscèle), l'hyperbole dans le cône obtusangle et l'ellipse dans le cône acutangle (chaque cône étant coupé par un plan perpendiculaire à l'une de ses arêtes). Tandis qu'Apollonius de Perga a considéré dans tous les cônes droits ou obliques, toutes les sections faites par tous les

plans imaginables. C'est pourquoi les géomètres de son temps, émerveillés de la beauté de ses théorèmes, lui ont décerné le titre de Grand Géomètre, comme le dit Géminus dans le sixième livre de ses *Préceptes géométriques*. »

Définitions premières.

6. J'appelle *axe d'un cône* la droite qui joint le sommet au centre du cercle de la base.

8. Je dis qu'un cône est droit lorsque son axe est perpendiculaire au plan de sa base.

9. J'appelle *scalène* un cône dont l'axe n'est pas perpendiculaire au plan de sa base.

10. J'appelle *diamètre d'une ligne plane*, une droite qui divise en parties égales toutes les droites parallèles entre elles, comprises dans la ligne plane.

11. J'appelle *sommet de la ligne plane* l'extrémité de son diamètre.

12. Je dis de l'une quelconque des droites que le diamètre divise en parties égales qu'elle est *ordinatim applicata* (au diamètre).

17. J'appelle *diamètres conjugués* deux diamètres dont chacun divise en parties égales les droites parallèles à l'autre.

18. J'appelle *axe d'une courbe* un diamètre perpendiculaire aux droites qu'il divise en parties égales.

LIVRE PREMIER.

Proposition V. — Si un cône scalène est coupé par un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan de la base, et qu'il soit coupé par un autre plan perpendiculaire au premier, et détachant, du côté du sommet, dans le premier plan un triangle semblable au triangle déterminé par le plan mené par l'axe, mais sous-contrairement disposé, la section par le second plan sera un cercle.

Proposition VI. — Un plan quelconque mené par l'axe d'un cône divise en parties égales les cordes du cône qui sont parallèles aux cordes du cercle de base perpendiculaires au diamètre suivant lequel le plan mené par l'axe coupe cette base.

Proposition VII. — Si un cône est coupé par un plan quelconque et par un second plan passant par l'axe et par le diamètre du cercle de base perpendiculaire à la trace du premier plan sur le plan de base, et que dans le premier plan on mène des parallèles à sa trace sur le plan de base, ces parallèles seront coupées en parties égales par l'intersection du plan sécant et du plan mené par l'axe. Cette intersection sera le diamètre de la section, et le point où elle coupera la section sera le sommet de cette section. Les cordes divisées en parties égales par le diamètre seront dites *ordinatim applicatæ*.

C'est sans doute de cette locution qu'est venu notre mot *ordonnée*. Le nom d'*appliquée* a du reste été longtemps donné aux ordonnées d'une courbe, avant et après Descartes.

Proposition XI. — Si un cône est coupé par un plan quel-

conque mené par l'axe et qu'il soit coupé par un autre plan parallèle à la fois aux cordes que le premier plan divise en parties égales et à l'un des côtés du triangle par l'axe, une ordonnée de la section (*ordinatim applicata*) pourra un espace [1] [c'est-à-dire fournira un carré] égal au rectangle compris sous l'abscisse [2] correspondante et sous une quatrième proportionnelle au rectangle compris sous les côtés du triangle par l'axe, au carré construit sur la base de ce triangle et à la distance du sommet de la section (c'est le point où la section est coupée par son diamètre) au sommet du cône; et cette section sera appelée une PARABOLE.

La quatrième proportionnelle s'appellera : *ea juxta quam possunt quæ ad diametrum ordinatim applicantur* ou le *latus rectum* (correspondant au diamètre). C'est ce que nous appelons le double du paramètre, ou $2p'$ dans l'équation $y^2 = 2p'x$ de la parabole rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Nous ne reproduisons pas la démonstration d'Apollonius, qui se déduira aisément de celle de la proposition suivante relative à l'hyperbole.

Proposition XII. — Si un cône est coupé par un plan passant par son axe et qu'il soit coupé par un autre plan coupant la base suivant une perpendiculaire à la base du triangle par l'axe, et que le diamètre de la section rencontre l'un des côtés du

(1) C'est sans doute de cette locution des anciens qu'est venu notre mot de *puissance*, de sorte que ce serait encore aux géomètres que les arithméticiens auraient emprunté cette expression.

(2) Littéralement : Rectam quæ ex diametro *abscinditur* inter ipsam (l'ordonnée) et verticem sectionis (le sommet de la section). On voit que notre mot *abscisse* est la traduction de partie retranchée (du diamètre).

triangle par l'axe au delà du sommet, une ordonnée de la section pourra l'espace compris sous l'abscisse et sous une quatrième proportionnelle au carré de la parallèle au diamètre, menée par le sommet du cône et terminée à la base, au rectangle compris sous les parties de la base du triangle par l'axe, déterminées par cette parallèle et à la partie du diamètre comprise entre les côtés du triangle par l'axe; et en plus un espace semblable et semblablement placé à celui qui serait compris sous cette quatrième proportionnelle et sous la partie du diamètre comprise entre les côtés du triangle par l'axe.

Une section de cette espèce est appelée *hyperbole*, et la quatrième proportionnelle dont il est question sera appelée *ea juxta quam possunt ad diametrum ordinatim applicatæ*, ou bien le *latus rectum;* la partie du diamètre comprise entre les côtés du triangle par l'axe sera appelée *transversum*.

Il faut remarquer que, dans l'énoncé de cette proposition, Apollonius ne définit pas le second rectangle, qu'il faut ajouter au premier pour former le carré de l'ordonnée, de sorte que l'énoncé ne fait pas connaître ce carré de l'ordonnée : la démonstration y suppléera. Mais c'est avec intention que l'énoncé reste incomplet. L'énoncé définit le *latus rectum*, et c'est à quoi vise Apollonius. D'un autre côté, comme dans la parabole le carré de l'ordonnée se trouvait égal au rectangle de l'abscisse et du *latus rectum*, on peut supposer qu'Apollonius a seulement voulu démontrer dans cette proposition XII que, dans l'hyperbole, le carré de l'ordonnée surpasse le rectangle de l'abscisse et du *latus rectum*, tandis que dans l'ellipse il lui sera inférieur.

Quant à l'expression *ea juxta quam possunt ad diametrum ordinatim applicatæ*, je renonce à la traduire; je préfère donner

le texte même de Halley, qui en fera bien comprendre le sens et qui d'ailleurs est curieux à plus d'un titre.

« Si conus plano per axem secetur, secetur autem et altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis, et sectionis diameter producta cum uno latere trianguli per axem extra verticem coni conveniat : recta linea, quæ a sectione ducitur parallela communi sectioni plani secantis et basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium adjacens rectæ, ad quam ea, quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangulum, eandem rationem habet quam quadratum rectæ, quæ diametro parallela a vertice coni usque ad basim trianguli ducitur, ad rectangulum sub basis partibus quæ ab ea fiunt contentum, latitudinem habens rectam, quæ ex diametro abscinditur inter ipsam et verticem sectionis interjectam; excedensque figura simili et similiter posita ei, quæ continetur sub recta angulo extra triangulum subtensa et ea juxta quam possunt quæ ad diametrum applicantur. Vocetur autem hujusmodi sectio Hyperbola. »

Voici la démonstration d'Apollonius, traduite, pour abréger, en formules modernes, mais sans autres modifications.

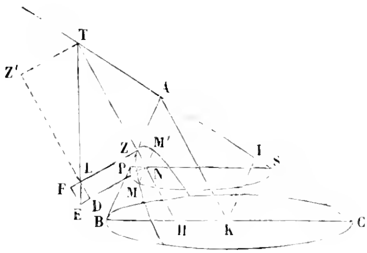
Là où nous écrivons $\overline{MN}^2$, il faut lire le carré construit sur MN; $PN \times NS$ doit se traduire par le rectangle compris sous PN et NS; enfin, quand nous écrivons $\frac{ZH}{AK} = \frac{BH}{BK}$, il faut lire : ainsi que ZH est à AK, de même BH est à BK.

Soient (*fig.* 17).

ABC le triangle par l'axe,

MZM′ la section, dont le diamètre est ZH ;

Fig. 17.



AK parallèle à ZH ;
ZL perpendiculaire à TZ, et telle que

$$\frac{ZL}{TZ} = \frac{BK.KC}{\overline{AK}^2};$$

$$\overline{MN}^2 = PN.NS;$$

mais

$$\frac{PN}{ZN} = \frac{BH}{ZH}, \quad \text{et} \quad \frac{BH}{ZH} = \frac{BK}{AK},$$

donc

$$\frac{PN}{ZN} = \frac{BK}{AK};$$

d'un autre côté,

$$\frac{NS}{TN} = \frac{HC}{TH}, \quad \text{et} \quad \frac{HC}{TH} = \frac{KC}{AK},$$

donc

$$\frac{NS}{TN} = \frac{KC}{AK};$$

d'ailleurs

$$\frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{TZ}} = \frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{ZL}},$$

donc

$$\frac{\mathrm{NS}}{\mathrm{TZ}} = \frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{ZL}} \frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{AK}};$$

mais, par construction,

$$\frac{\mathrm{TZ}}{\mathrm{ZL}} = \frac{\mathrm{AK}^2}{\mathrm{BK.\,KC}};$$

donc

$$\frac{\mathrm{NS}}{\mathrm{NE}} = \frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{AK}} \frac{\overline{\mathrm{AK}}^2}{\mathrm{BK.\,KC}} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{BK}};$$

donc, en résumé,

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = \mathrm{ZN.\,NE}.$$

Le carré de l'ordonnée MN se compose donc du rectangle LZND, adjacent à ZL, c'est-à-dire au *latus rectum*, et à ZN, c'est-à-dire à l'abscisse, et du rectangle LDEF semblable et semblablement placé au rectangle TZLZ′ formé sur le *transversum* TZ et le *latus rectum* ZL.

Proposition XIII. — Théorème analogue relatif au cas de la section elliptique.

Dans les deux propositions XII et XIII le *latus rectum* ZL n'est autre chose que le double de ce que nous appellerions le paramètre de la courbe, relatif à son diamètre TZH, ou $2\frac{b'^2}{a'}$, comme il est facile de le vérifier; par conséquent, la surface LZND est égale au rectangle $2\frac{b'^2}{a'}\cdot x$; quant à la surface LDEF, excédante dans

l'hyperbole, et déficiente dans celui de l'ellipse, elle est égale au carré x^2 multiplié dans le rapport de b'^2 à a'^2; en effet

$$\frac{\mathrm{FL}}{\mathrm{LD}} = \frac{\mathrm{LZ}}{\mathrm{TZ}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{FL}}{x} = \frac{2\frac{b'^2}{a'}}{2a'} = \frac{b'^2}{a'^2};$$

d'où

$$\mathrm{FL}.x = \frac{b'^2}{a'^2}x^2;$$

de sorte que la théorie d'Apollonius donne identiquement pour l'équation de la courbe

$$y^2 = \frac{2b'^2}{a'}x \pm \frac{b'^2}{a'^2}x^2.$$

Nous avons dit qu'Apollonius insiste sur ce que, dans l'hyperbole, le carré d'une ordonnée dépasse le rectangle de l'abscisse par le *latus rectum*, tandis que dans l'ellipse il lui est inférieur. C'est cette distinction à faire, dans les deux cas, qui lui a fait choisir pour les deux courbes les noms *d'hyperbole* et *d'ellipse*, hyperbolique signifiant *augmenté*, et elliptique *diminué*.

Quant à la parabole, on a vu que son ordonnée peut l'espace égal au rectangle compris sous l'abscisse et une quatrième proportionnelle au rectangle compris sous les côtés du triangle déterminé par le plan mené par l'axe, au carré construit sur la base de ce triangle et à la distance du sommet de la section au sommet du cône; mais cette quatrième proportionnelle n'est autre chose que la limite vers laquelle tend ZL lorsque ZH devient parallèle à AC, ou le *latus rectum* de la parabole, en sorte que la parabole se trouve placée entre l'hyperbole et l'ellipse, le carré de son

ordonnée étant égal au rectangle de l'abscisse par le *latus rectum*.

En effet, si nous menons KI parallèle à BA,

$$\frac{TZ}{AZ} = \frac{AK}{KI};$$

mais

$$\frac{KI}{KC} = \frac{BA}{BC},$$

par conséquent

$$\frac{TZ.KC}{AZ} = \frac{AK.BC}{BA};$$

or, ZL avait été déterminé par la proportion

$$\frac{ZL}{TZ} = \frac{BK.KC}{AK^2}$$

qui donne

$$ZL = \frac{TZ.KC.BK}{AK^2},$$

ou, en remplaçant TZ.KC par $\dfrac{AZ.AK.BC}{BA}$,

$$ZL = \frac{AZ.AK.BC.BK}{BA.AK.AK} = \frac{AZ.BC.BK}{BA.AK}.$$

Si AK vient se confondre avec AC et, par suite, BK avec BC, ZL devient donc

$$AZ\,\frac{\overline{BC}^2}{BA.AC};$$

c'est-à-dire que le *latus rectum* de la parabole est bien la limite de celui de l'hyperbole.

Nous croyons devoir faire remarquer, dans cette démonstration,

combien grandes étaient déjà les ressources des anciens géomètres, qui pouvaient si aisément remplacer la considération d'un rectangle [TZ.KC], dont les côtés deviennent en même temps l'un nul et l'autre infini, par celle d'un autre rectangle dont les côtés ont des limites finies.

Archimède avait déjà fait l'équivalent dans beaucoup de cas analogues.

Proposition XIV. — Apollonius a appelé hyperbole la section de l'une des nappes du cône par un plan ne rencontrant pas toutes les génératrices de cette nappe ; il considère dans cette proposition la section, par le même plan, de l'autre nappe du cône.

Les deux axes transverses ne se distinguent déjà pas, et Apollonius démontre que le *latus rectum* de l'une des branches est égal à celui de l'autre : d'où il résulte que les deux branches sont égales.

Les deux branches *vocentur sectiones oppositæ*. Apollonius ne désigne jamais sous le nom d'*hyperbole* que l'une des branches.

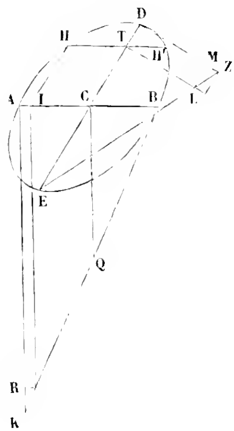
Proposition XV. — Si, dans une ellipse, du point qui divise le diamètre en parties égales, on mène une ordonnée prolongée de part et d'autre jusqu'à la section, et que l'on cherche la troisième proportionnelle à cette ordonnée et au diamètre, une parallèle au diamètre menée de la section à cette ordonnée pourra l'espace adjacent à la troisième proportionnelle et ayant pour largeur la portion de l'ordonnée menée par le milieu du diamètre, comprise entre la parallèle au diamètre et la section; mais diminué (cet espace) d'une figure (rectangulaire) semblable à celle qui est contenue sous l'ordonnée (prolongée) et sous la droite *juxta quam possunt ;* et si la parallèle au diamètre est prolongée jusqu'à l'autre

partie de la section, elle sera divisée en deux parties égales par l'ordonnée parallèle au diamètre.

C'est-à-dire, soient (*fig.* 18)

ADBE une ellipse,
AB son diamètre (les coniques n'en ont encore chacune qu'un);
C le milieu de ce diamètre;
DCE l'ordonnée au diamètre AB, menée par le point C;

Fig. 18.



HTH′ une parallèle à AB, menée d'un point H quelconque de la section, coupant DE en T et rencontrant de nouveau la section en H′;

DZ une perpendiculaire à DE égale en longueur à $\frac{\overline{AB}^2}{DE}$.

Il faut démontrer que DE sera un nouveau diamètre de la courbe (qui ainsi en aura déjà deux); que les droites *ordinatim applicatæ* à ce second diamètre seront, comme HTH′,

parallèles à AB, et surtout que le *latus rectum* de ce second diamètre sera DZ, parce que le carré de l'appliquée au second diamètre, c'est-à-dire de HT, sera lié à l'abscisse DT et à DZ, sans oublier la figure déficiente (LM, MZ), semblable à la figure (ED, DZ), absolument comme le carré de l'appliquée au premier diamètre était lié à l'abscisse correspondante et au *latus rectum* correspondant, en tenant compte de la figure déficiente, etc.; en d'autres termes, il faut démontrer que $\overline{HT}^2$ sera égal à $DT \times DZ$ (rectangle adjacent à DZ, et ayant pour largeur l'abscisse DT) diminué de $LM \times MZ$; ou enfin que $\overline{HT}^2$ sera égal à $DT \times TL$.

Nous ne rapporterons pas la démonstration d'Apollonius que l'on pourra retrouver en construisant le *latus rectum* AK de AB, et se servant, pour avoir $\overline{HT}^2$, ou $\overline{IC}^2$, de ce que l'on sait que $\overline{HI}^2 = AI \times AR$. Nous nous bornerons à faire remarquer que les deux triangles EDZ et ABK sont semblables; en effet, de ce que $DZ = \dfrac{\overline{AB}^2}{DE}$; comme d'un autre côté

$$\overline{DC}^2 = AC \times CQ = AC \times \frac{AK}{2};$$

d'où

$$\overline{DE}^2 = AB \times AK;$$

en multipliant en croix, il vient

$$DZ.AK = AB.DE,$$

c'est-à-dire que les deux diamètres sont en raison inverse de leurs *latus rectum;* et qu'ainsi le *latus rectum* de chacun des deux diamètres conjugués est une quatrième proportionnelle à ce diamètre, à son conjugué et au *latus rectum* de ce dernier.

Proposition XVI. — Si, par le milieu du diamètre des sections opposées, on mène une parallèle aux ordonnées de ce diamètre, cette droite divisera en parties égales les cordes parallèles au diamètre et sera le diamètre conjugué du premier.

Apollonius ne démontre pour l'hyperbole que la seconde partie du théorème relatif à l'ellipse; c'est, en effet, qu'il ne donne pas de *latus rectum* au diamètre qui ne rencontre pas la courbe.

Quant à la longueur de ce diamètre non transverse, elle résulte d'une définition : la droite menée par le centre, parallèlement aux ordonnées, qui est moyenne proportionnelle entre les côtés de la figure (le diamètre transverse et son *latus rectum*), et qui est divisée en parties égales au centre, sera appelée *le second diamètre*. (Apollonius n'entend jamais par diamètre que la longueur même du diamètre et non pas une droite indéfinie.)

Proposition XVII. — La droite menée par l'extrémité du diamètre parallèlement à ses ordonnées est tangente à la section (*extra sectionem cadit*).

« En effet, dit Apollonius, si elle coupait la section en un autre point, elle aurait son milieu sur le diamètre, et elle y a déjà l'une de ses extrémités. »

Les propositions suivantes sont des lemmes presque tous négatifs, qu'on ne se donnerait même pas la peine d'énoncer aujourd'hui.

Proposition XXXIII. — Si, sur une parabole, on prend un point quelconque; que, par ce point, on mène une ordonnée au diamètre, qu'on prolonge ce diamètre, en dehors de la courbe, d'une longueur égale à l'abscisse interceptée sur le diamètre par l'ordonnée, et qu'on joigne le point choisi sur la section à l'ex-

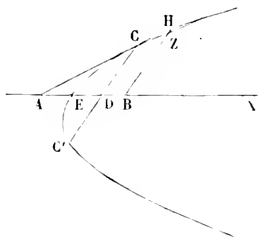
trémité du diamètre ainsi prolongé, la droite qui joindra les deux points sera tangente à la courbe.

La démonstration est trop curieuse pour que nous ne la rapportions pas.

Soient (*fig.* 19)

EX un diamètre de la parabole;
C un point de la courbe;

Fig. 19.



CDC′ l'ordonnée au diamètre, menée du point C,

$$AE = ED;$$

Supposons que AC prolongé passe par un point Z intérieur à la courbe, et menons la demi-corde HZB, *ordinatim applicata*, $\frac{\overline{HB}^2}{\overline{CD}^2}$ sera plus grand que $\frac{\overline{ZB}^2}{\overline{CD}^2}$.

Remplaçons $\frac{\overline{HB}^2}{\overline{CD}^2}$ par $\frac{BE}{DE}$ et $\frac{\overline{ZB}^2}{\overline{CD}^2}$ par $\frac{\overline{BA}^2}{\overline{DA}^2}$; on aura donc

$$\frac{BE}{DE} > \frac{\overline{BA}^2}{\overline{DA}^2};$$

ou, en multipliant par 4AE les deux termes du premier rapport,

$$\frac{4BE \times AE}{4AE \times DE} > \frac{\overline{BA}^2}{\overline{DA}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{4BE \times AE}{\overline{DA}^2} > \frac{\overline{BA}^2}{\overline{DA}^2};$$

c'est-à-dire

$$4BE \times AE > \overline{BA}^2.$$

Mais si le point E était le milieu de BA, $4BE \times AE$ serait égal à $\overline{BA}^2$ et comme le point E n'est pas le milieu de BA, $4BE \times AE$ est moindre que $\overline{BA}^2$.

(Bien entendu, nous avons traduit en formules modernes le langage d'Apollonius. Par exemple, $4BE \times AE$, dans le texte, c'est *rectangulum* BE, EA *quater*).

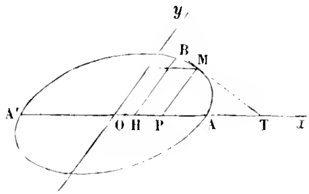
Proposition XXXIV. — Si, sur une hyperbole, une ellipse ou un cercle, on prend un point quelconque; que l'on mène de ce point l'ordonnée au diamètre de la courbe; que l'on détermine sur le diamètre un point dont les distances aux extrémités de ce diamètre soient entre elles comme les segments du diamètre (déterminés par l'ordonnée), et que l'on joigne le point obtenu au point pris sur la section, cette droite sera tangente à la section, au point choisi d'abord.

C'est-à-dire : si du point M (*fig.* 20) on mène la parallèle MP au diamètre conjugué de A'A, et que l'on détermine le point T de façon que $\frac{TA}{TA'} = \frac{PA}{PA'}$, MT sera la tangente en M à la section.

La démonstration d'Apollonius est analogue à celle de la proposition XXXIII, que nous avons rapportée; mais elle est naturellement beaucoup plus compliquée. Elle consiste à faire voir que MT ne peut pas avoir un point Z dans l'intérieur de la

courbe, et l'absurdité, comme dans le cas précédent, résulte de la comparaison des carrés des ordonnées MP, BH et ZH, en tenant

Fig. 20.



compte de ce que les carrés des ordonnées de la courbe MP et BH ont entre eux même raison que les rectangles (PA, PA′) et (HA, HA′).

Dans les propositions suivantes, Apollonius démontre qu'entre la courbe et la tangente il ne peut passer aucune autre droite.

Il est curieux d'observer que les anciens, qui voyaient sans doute tout aussi juste que nous, n'énonçaient jamais que les propositions qu'ils pouvaient démontrer. Assurément Apollonius n'aurait pas hésité à croire qu'entre une courbe quelconque, même non définie, et sa tangente, il ne peut passer aucune autre droite; mais il ne l'aurait pas dit, ne pouvant le prouver. Cette sorte de timidité a eu sa raison d'être, aux deux points de vue dogmatique et pédagogique; mais de plus elle a sans doute excité notre audace par l'ennui.

Propositions XXXVII à XLV. — Jusqu'ici chaque section conique a un diamètre et son conjugué que, du reste, on aperçoit à peine derrière le *latus rectum* de son conjoint; mais on ne lui en connaît pas encore d'autres. Le premier est l'intersection du plan de la courbe par le plan mené par l'axe du cône et par le

diamètre du cercle de base qui est perpendiculaire à la trace, sur le plan de ce cercle, du plan de la conique.

Les propositions XXXVII à XLV ont pour objet de préparer la démonstration de l'existence d'une infinité de diamètres entièrement analogues au premier, c'est-à-dire ayant, comme lui, chacun son *latus rectum* et son conjugué.

Apollonius y parvient en transformant les propriétés précédentes de la tangente considérée dans ses rapports avec le diamètre connu et son *latus rectum*, ou avec les deux diamètres conjugués connus.

Mais nous n'entrerons pas dans le détail de ses démonstrations.

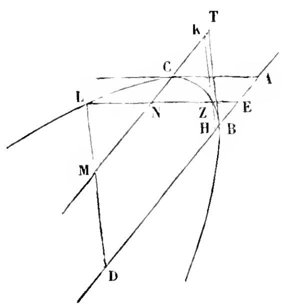
Proposition XLVI. — La parallèle au diamètre d'une parabole menée par le point de contact d'une tangente divise en parties égales les cordes parallèles à cette tangente.

Voici la démonstration d'Apollonius :

Soient (*fig.* 21)

CA la tangente considérée, qui rencontre le diamètre ABD en A ;

Fig. 21.



ZL une corde parallèle à la tangente, qui coupe le diamètre en E ;
CN une parallèle à ABD.

Il faut démontrer que le point N est le milieu de LZ.

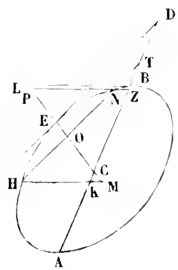
Que l'on mène les ordonnées BT, ZHK et LMD. On a démontré dans la XLII^e proposition que le triangle ELD est égal au parallélogramme BTMD, et le triangle EZH égale au parallélogramme BTKH; le parallélogramme HKMD est donc égal au quadrilatère LZHD. Cela posé, que l'on enlève de part et d'autre la partie commune MNZHD, il restera les deux triangles ZKN et LMN; ces triangles sont donc égaux, mais ils sont semblables; donc leurs parties sont égales; donc ZN = LN; donc CM parallèle à AD est le diamètre des cordes parallèles à la tangente.

Proposition XLVII. — Si une tangente à une hyperbole, une ellipse ou un cercle rencontre le diamètre et qu'on joigne le centre au point de contact, cette droite divisera en parties égales les cordes parallèles à la tangente.

Soient (*fig.* 22)

EBA, la conique dont le diamètre est AB et le centre C;

Fig. 22.



ED la tangente en E, qui rencontre le diamètre en D;
TNOH une parallèle à ED;
BL la tangente en B;
COEL la droite menée du centre C au point E.

Menons les ordonnées au diamètre NZ et HK et prolongeons-les jusqu'à leurs points de renconte P et M avec CE prolongé.

Il faut démontrer que O est le milieu de NH ; or, d'après la proposition XLIII, le triangle TNZ est équivalent au quadrilatère BZPL, et le triangle THK équivalent à la différence des triangles LBC et CMK ; donc, le quadrilatère NZKH est équivalent à la différence des triangles PZC et CMK. Retranchons la partie commune NZCO, il reste HOCK égal à la différence des triangles PNO et CMK, ou le triangle HOM égal au triangle PNO. Mais ces triangles sont semblables ; donc NO égale OH.

Apollonius s'occupe ensuite de constater que les droites qui divisent en parties égales les cordes parallèles à une tangente quelconque à la courbe sont bien des diamètres jouissant de toutes les propriétés du premier, c'est-à-dire ayant chacun son *latus rectum*, et tels que les ordonnées de la courbe qui leur sont appliquées puissent des espaces égaux à des rectangles adjacents au *latus rectum* et ayant pour hauteur l'abscisse, augmentés ou diminués, suivant que la courbe est une hyperbole ou une ellipse, de rectangles semblables et semblablement placés à ceux qui sont compris sous les diamètres et leurs *latus rectum*.

Proposition LII. — Étant donnés un point sur une droite indéfinie, une droite de longueur donnée et un angle, construire la parabole qui aurait pour diamètre la droite donnée, pour sommet le point donné sur cette droite, et dont une ordonnée, inclinée au diamètre sous l'angle donné, pourrait le rectangle compris sous la droite de longueur donnée et sous l'abscisse qu'elle retrancherait du diamètre.

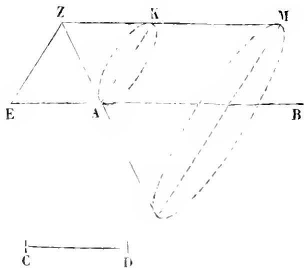
Par construire la parabole, Apollonius entend déterminer le

cône à base circulaire qui contiendra cette parabole, dans le plan où se fait la figure.

Il suppose d'abord que l'angle donné soit droit et détermine le cône dans ce cas. Il ramène ensuite le cas général au cas particulier, mais en supposant alors qu'on ait pu construire la parabole dans le premier cas.

Soient (*fig.* 23) AB la droite donnée, qui doit être l'axe de la parabole cherchée; A le sommet de cette parabole, et CD la longueur donnée, ou le paramètre ($2p$); le problème étant indéterminé, Apollonius prend à volonté une longueur EA (plus grande que le quart de CD) et suppose, dans un plan perpendiculaire à celui du tableau, un triangle EAZ isoscèle (AZ étant égal à AE), et dont le troisième côté EZ soit moyen proportionnel entre EA et CD.

Fig. 23.



Il mène ZK parallèle à EA et AK parallèle à EZ. Le cône cherché a pour sommet le point Z et pour base la circonférence décrite sur AK comme diamètre, dans un plan perpendiculaire au plan KZA; c'est-à-dire que ce cône est coupé par le plan du tableau suivant la parabole cherchée.

En effet, d'après la proposition XI, le paramètre de la parabole,

intersection du cône considéré par le plan du tableau, serait donné par la proportion

$$\frac{X}{AZ} = \frac{\overline{AK}^2}{AZ \times ZK},$$

ou, puisque $AK = EZ$ et que $AZ = ZK = EA$,

$$X = \frac{\overline{EZ}^2}{EA};$$

mais EZ a été pris moyen proportionnel entre EA et CD; donc

$$X = CD.$$

Les deux dernières propositions du Livre I ont pour objet analogue la construction du cône qui contiendrait une ellipse définie par l'un de ses axes et le *latus rectum* correspondant, ou une hyperbole définie par son axe transverse et le *latus rectum* correspondant.

LIVRE II.

Proposition I. — Si l'on mène une tangente à une hyperbole, à l'extrémité d'un diamètre, qu'on prenne sur la tangente, de part et d'autre du point de contact, des longueurs dont le carré soit le quart du rectangle construit sur le diamètre et le *latus rectum* correspondant, enfin qu'on joigne au centre les extrémités de ces longueurs, les droites ainsi menées ne couperont pas l'hyperbole, et on les appelle *les asymptotes.*

Cela revient à dire que les asymptotes sont les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués, car le *latus rectum* est $\frac{2b'^2}{a'}$, et le quart du rectangle fait sur ce *latus rectum* et sur le diamètre $2a'$ est b'^2.

La démonstration d'Apollonius résulte de la comparaison des

espaces que peuvent une ordonnée de la courbe et l'ordonnée de l'asymptote couchée suivant la même droite. Mais elle n'est complétée que dans la proposition II, où Apollonius fait voir, par un moyen analogue, que toute droite comprise dans l'angle des asymptotes où se trouve la courbe rencontre cette courbe.

Proposition III. — La portion d'une tangente, comprise entre les asymptotes, est divisée en parties égales par le point de contact.

En effet, il y a bien une infinité de tangentes, mais il n'y a que deux asymptotes, et chaque tangente peut servir à les construire.

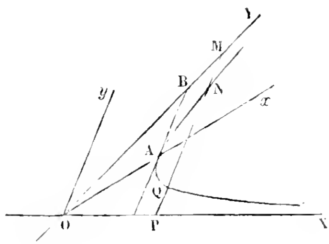
Proposition IV. — Étant données les deux asymptotes d'une hyperbole et un point de la courbe, construire cette courbe.

Les données font immédiatement connaître deux diamètres conjugués de la courbe, mais c'est le *latus rectum* du diamètre passant par le point donné qu'Apollonius construit, parce qu'au moyen du diamètre transverse et de son *latus rectum*, il pourrait construire un cône contenant l'hyperbole.

Proposition VIII. — Les portions d'une droite quelconque comprises entre l'hyperbole et les asymptotes sont égales.

Proposition X. — Les segments d'une droite quelconque ter-

Fig. 24.



minée aux deux asymptotes d'une hyperbole, déterminés par l'un

des deux points de rencontre de cette droite avec la courbe, comprennent un rectangle égal au quart de celui qui aurait pour côtés le diamètre conjugué de la droite et son *latus rectum*, c'est-à-dire (*fig.* 24),

$$\mathrm{MN.NP} = \mathrm{QP.QM} = \tfrac{1}{4}\,2\mathrm{OA}.\,\frac{\overline{2\mathrm{BA}}^2}{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{BA}}^2.$$

Proposition XII. — Le rectangle compris sous les parallèles menées d'un point de l'hyperbole aux deux asymptotes et terminées à ces asymptotes est constant.

Proposition XIV. — Les asymptotes et l'hyperbole prolongées indéfiniment s'approchent de plus en plus et parviennent à un intervalle moindre que tout intervalle donné.

Proposition XV. — Les sections opposées ont les mêmes asymptotes, parce que le diamètre et le *latus rectum* correspondant sont les mêmes.

Proposition XVI. — Les parties d'une droite comprises entre les asymptotes et les sections opposées sont égales.

Proposition XVII. — Les asymptotes de deux sections opposées sont aussi les asymptotes des sections opposées qu'on appelle conjuguées des premières.

Deux hyperboles conjuguées sont pour Apollonius, comme pour nous, par définition, deux hyperboles ayant un système de diamètres conjugués commun, mais changés de transverse en non transverse, et réciproquement.

Les propositions suivantes se rapportent aux propriétés des tangentes et des sécantes à l'une des deux hyperboles conjuguées, par rapport à l'autre.

Proposition XXVIII. — Une droite qui divise en parties égales deux cordes parallèles est un diamètre.

Proposition XXIX. — Si deux tangentes se coupent, la droite menée de leur point de rencontre au milieu de la corde qui joint les points de contact est un diamètre.

Proposition XXXVII. — Si une droite coupe les deux sections opposées, la ligne menée du centre au milieu de cette droite sera un diamètre *droit* (*diameter recta*); son conjugué sera la droite menée du centre parallèlement à la droite considérée.

Proposition XL. — Si deux tangentes aux sections opposées se coupent, que par leur point de rencontre on mène une parallèle à la corde des contacts, et que par les points où cette parallèle coupe les sections opposées on mène des tangentes à ces sections, elles iront passer par le milieu de la première corde des contacts.

Proposition XLIV. — Trouver un diamètre d'une conique.

Proposition XLV. — Trouver le centre d'une ellipse ou d'une hyperbole.

Proposition XLVI. — Trouver l'axe d'une parabole.

Proposition XLVII. — Trouver l'axe d'une ellipse ou d'une hyperbole.

Après avoir trouvé l'axe en coupant la conique par un cercle concentrique et menant les diamètres conjugués des cordes obtenues, Apollonius se dit :

Proposition XLVIII. — Mais il reste à démontrer qu'il n'y a pas d'autres axes.

Proposition XLIX. — Mener une tangente à une conique par un point extérieur.

Apollonius construit le diamètre passant par le point donné

et obtient le point de contact par l'intersection de la courbe avec l'ordonnée au diamètre qui détermine sur ce diamètre des segments proportionnels aux distances du point donné aux extrémités de ce même diamètre.

Proposition L. — Mener une tangente parallèle à une droite donnée.

Apollonius construit le pied de la tangente cherchée sur l'axe. Le triangle rectangle qui a pour sommets ce pied de la tangente sur l'axe, T, le point de contact M et le pied N de l'ordonnée, a ses angles donnés, et la raison du carré de MN au rectangle compris sous TN et sous la distance du point T au centre est aussi donnée; on peut donc faire la construction.

Propositions LI et LII. — Mener une tangente qui fasse un angle donné avec le diamètre passant par le point de contact.

LIVRE III.

Ce livre débute par une série de propositions qu'il serait beaucoup trop long d'énoncer toutes et qui se rapportent soit à des égalités ou à des proportions entre des triangles, des rectangles ou des carrés dont les éléments sont déterminés par des parties de transversales, de cordes ou de tangentes, dans une foule de conditions; soit à des égalités ou proportions entre des segments de transversales ou de tangentes.

Ces propositions tendent plus ou moins à l'établissement de la théorie des foyers. En voici quelques-unes :

Proposition I. — Si deux tangentes à une conique se coupent et qu'on mène les diamètres passant par les points de contact, le triangle compris entre les deux tangentes et un diamètre

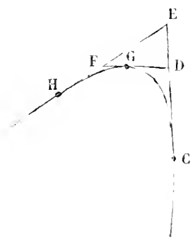
sera égal au triangle compris entre les deux tangentes et l'autre diamètre.

Proposition XVII. — Si deux tangentes à une conique se coupent et qu'on mène des cordes parallèles à ces tangentes, les carrés construits sur les portions des tangentes comprises entre leur point de rencontre et les points de contact seront entre eux comme les rectangles compris sous les segments des cordes, déterminés par leur point de rencontre ; le carré d'une tangente et le rectangle des parties de la corde qui lui est parallèle étant les deux antécédents où les deux conséquents des deux raisons.

Viennent ensuite des égalités ou proportions entre des segments de transversales ou de tangentes. Voici la plus remarquable :

Proposition XLI. — Si l'on mène trois tangentes (*fig.* 25)

Fig. 25.



à une parabole, elles se couperont en même raison. C'est-à-dire qu'on aura

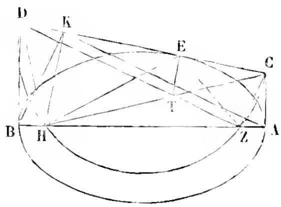
$$CD : DE :: EF : FH :: DG : GF.$$

Les propositions suivantes constituent la *Théorie des foyers.*

Proposition XLV. — Si, des extrémités du grand axe AB d'une ellipse (*fig.* 26) ou de l'axe transverse d'une hyperbole, on élève

des perpendiculaires AC et BD à cet axe, que l'on mène à la courbe une tangente quelconque DEC, qui coupe les perpendicu-

Fig. 26.



laires en C et D, que l'on détermine les points Z et H tels que les rectangles compris sous AZ et ZB, BH et HA soient égaux au quart du carré construit sur l'autre axe, enfin que l'on joigne CZ, CH, DZ et DH, les angles DZC et CHD seront droits.

[Apollonius ne dit pas que les rectangles (AZ, ZB) et (BH, HA) sont égaux au quart du carré construit sur le second axe, mais à la quatrième partie de la figure. Il ne dit même pas que les rectangles (AZ, ZB) et (BH, HA) sont formés des parties de l'axe, il les appelle *appliqués à l'axe* et les foyers sont dits *points provenant de l'application.*]

Voici la démonstration d'Apollonius : Comme il a été démontré (proposition XLII de ce livre) que le rectangle fait sur AC et BD est égal au quart de la figure (c'est b^2), il est donc égal au rectangle AZ, ZB (Apollonius écrit AZB) ; donc

$$CA : AZ :: ZB : BD.$$

Mais les angles CAZ et DBZ sont droits; donc les angles ACZ et BZD sont égaux, ainsi que les angles AZC et ZDB; donc les angles CZA et DZB font un droit ; donc DZC est aussi droit.

Proposition XLVI. — On voit en même temps, en décrivant le demi-cercle DHZC. que les angles ACZ et DCH sont égaux, ainsi que les angles CDZ et BDH.

Proposition XLVII. — La droite ET est perpendiculaire à la tangente.

Proposition XLVIII. — Les droites ZE et HE font des angles égaux avec la tangente DEC.

Proposition XLIX. — Si de H, par exemple, on abaisse la perpendiculaire HK sur la tangente, l'angle BKA sera droit.

Proposition L. — Si du centre de la conique on mène une parallèle à la droite qui joint l'un des foyers au point de contact de la tangente et qu'on prolonge cette parallèle jusqu'à sa rencontre avec la tangente, elle sera égale au demi-axe. Apollonius démontre en même temps que la droite qui joint le second foyer à l'extrémité de la parallèle dont on vient de parler est perpendiculaire à la tangente.

Propositions LI et LII. — Dans l'hyperbole la différence, et dans l'ellipse la somme des droites menées des foyèrs à un point de la courbe est égale à l'axe.

LIVRE IV.

Ce livre a pour objet principal la détermination du nombre des points de rencontre de deux coniques, et comme Apollonius, naturellement, ne compte pas les intersections idéales ou imaginaires, le nombre des cas qu'il examine se complique beaucoup.

Il faut convenir, toutefois, qu'il a vu avec une extrême lucidité comment le cas général se relie aux cas particuliers, dans les circonstances où les deux coniques deviennent tangentes, asymptotiques, bitangentes, etc.

Le livre s'ouvre par une proposition intéressante par elle-même, mais qui va jouer un rôle important dans la démonstration du théorème que deux coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points.

Proposition I. — Si l'on mène d'un point extérieur à une conique une tangente et une sécante, et que l'on divise la partie intérieure de la sécante en parties proportionnelles aux distances qui séparent le point extérieur des points d'intersection de la sécante avec la conique, de façon que les antécédents ou conséquents se terminent aux mêmes points; que l'on joigne le point de contact de la tangente avec le point de division de la partie intérieure de la sécante; qu'on prolonge cette droite jusqu'à son deuxième point de rencontre avec la conique, et enfin qu'on joigne ce second point de rencontre avec le point extérieur, cette dernière droite sera tangente à la conique.

C'est, comme on voit, le théorème que la corde des contacts, des tangentes menées d'un point extérieur, est le lieu des points conjugués harmoniques du point extérieur sur toutes les cordes issues de ce point.

Les propositions suivantes concernent les cas particuliers relatifs au théorème précédent.

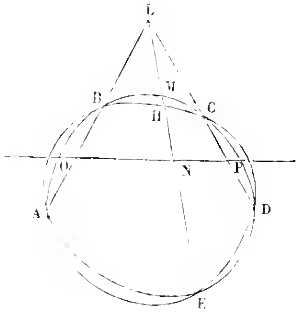
Proposition XXIV. — Deux sections coniques ne peuvent pas avoir une partie commune et une partie non commune.

Apollonius mène deux cordes parallèles se terminant de part et d'autre à la partie commune et une corde parallèle à celles-là se terminant d'un côté à la partie commune et de l'autre aux parties non communes; le diamètre conjugué des deux premières cordes devrait passer par les deux milieux de la troisième, ce qui est absurde.

Proposition XXV. — Deux sections coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points.

Supposons qu'elles se coupent en cinq points A, B, C, D, E; joignons AB et DC qui se coupent en L (*fig.* 27) et divisons AB

Fig. 27.



et DC aux points O et P, de façon que

$$\frac{LA}{LB} = \frac{OA}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{LD}{LC} = \frac{PD}{PC}.$$

Joignons OP; cette droite coupera chacune des coniques aux points de contact des tangentes menées de L.

Joignons LE; cette droite coupera OP en un point N et les deux coniques en des points M et H, entre B et C, par exemple; on aura donc en même temps

$$\frac{NH}{NE} = \frac{LH}{LE} \quad \text{et} \quad \frac{NM}{NE} = \frac{LM}{LE};$$

d'où

$$\frac{NH}{LH} = \frac{NM}{LM} \quad \text{ou} \quad \frac{NH}{NM} = \frac{LH}{LM},$$

ce qui est absurde.

Proposition XXVI. — Si deux coniques se touchent en un point, elles ne pourront se rencontrer en plus de deux autres points.

Proposition XXVII. — Si deux coniques se touchent en deux points, elles ne pourront se rencontrer en un autre point.

Les autres propositions concernent des cas particuliers, tels que celui, par exemple, où les coniques ont même centre.

LIVRE V.

L'objet principal de ce livre est la discussion du problème de mener par un point extérieur toutes les normales possibles à une conique.

Il est vraiment extraordinaire qu'Apollonius détermine les pieds des normales menées d'un point extérieur à une conique, exactement comme nous le ferions, par l'intersection de la conique avec une hyperbole entre ses asymptotes. Cela est si remarquable, qu'il faut en donner la preuve.

Proposition LIX. — Si la section est une hyperbole ou une ellipse, comme AB (Apollonius a traité le cas de la parabole dans la proposition précédente), dont l'axe soit BC et le centre C (*fig.* 28 et 29); que E soit le point donné et que EZ soit la perpendiculaire abaissée de E sur l'axe; que l'on fasse CH à HZ comme le diamètre transverse est au *latus rectum*, c'est-à-dire $\frac{CH}{HZ} = \frac{2a}{\frac{2b^2}{a}} = \frac{a^2}{b^2}$, et que l'on mène la perpendiculaire HM à l'axe; que l'on fasse aussi ET à TZ dans la même raison du diamètre transverse au *latus rectum* et que l'on mène TK parallèle à l'axe; que par le point E on décrive l'hyperbole EAS asymptote aux

droites HM et KT, laquelle coupera la conique proposée en A, et que l'on joigne EA qui rencontre l'axe en D : je dis que la droite AD sera minimum.

Fig. 28.

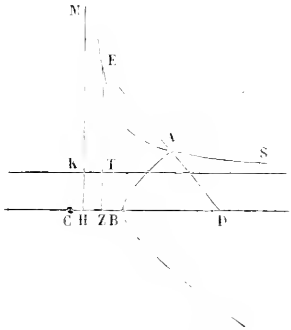
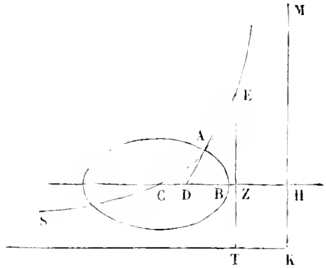


Fig. 29.



(Apollonius donne à toutes les normales le nom de maximum ou de minimum selon le point d'où il les suppose menées à la courbe. Ici c'est du point D.)

On ne peut pas dire qu'Apollonius ait déterminé les développées des coniques, mais il les conçoit comme séparant le plan en deux parties, des points de l'intérieur desquelles on peut mener soit deux, soit quatre normales.

LIVRE VI.

Ce livre traite de la similitude des coniques, et quelques-unes des propositions qu'il contient seront utilisées dans le septième.

Apollonius appelle semblables deux coniques dont les ordonnées sont également inclinées sur les diamètres par rapport auxquels on les considère, et sont d'ailleurs proportionnelles aux abscisses comptées sur ces diamètres à partir de leurs extrémités respectives.

Il appelle *figure d'une conique rapportée à un axe ou à un diamètre* le rectangle compris sous l'axe ou le diamètre et sous le *latus rectum* correspondant.

Après avoir établi de diverses manières les conditions de similitude, Apollonius s'occupe de trouver sur un cône droit donné une conique donnée, et inversement de déterminer un cône droit contenant une conique donnée.

LIVRE VII.

C'est dans ce livre que se trouvent les deux théorèmes sur les diamètres conjugués. Apollonius énonce d'abord le premier comme nous, puis il y revient sous cette forme.

Proposition XXIX. — Dans une hyperbole, la différence entre la figure de la section, faite sur un diamètre quelconque, et le carré de ce diamètre est partout égale.

C'est-à-dire : la différence entre le rectangle fait sur un diamètre et son *latus rectum,* d'une part, et le carré fait sur le diamètre, de l'autre, est toujours la même.

Ou, plus clairement : $2\dfrac{b'^2}{a'} \times 2a' - 4a'^2 = 4b'^2 - 4a'^2 = \text{const.}$

Proposition XXX. — Dans l'ellipse, si l'on ajoute à la figure de la section, faite sur un diamètre quelconque, le carré de ce diamètre, la somme est toujours égale.

Vient ensuite l'énoncé du second théorème.

Proposition XXXI. — Si l'on mène deux diamètres conjugués quelconques dans l'ellipse ou dans les sections opposées, le parallélogramme contenu sous ces diamètres sera égal au rectangle fait sous les axes, pourvu que les angles de ce parallélogramme

soient égaux aux angles au centre de la section, compris par les diamètres de la section.

Ces théorèmes sont précédés de propositions qui servent à les établir, et parmi lesquelles nous citerons :

Proposition IV. — Le carré de la portion d'une tangente à une ellipse ou à une hyperbole, comprise entre le point de contact et le point de rencontre avec l'axe transverse, est au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente, dans le rapport des distances du pied de l'ordonnée du point de contact au pied de la tangente sur l'axe et au centre.

LIVRE VIII.

Ce livre se compose tout entier de problèmes dont voici les énoncés :

Proposition I. — Étant donné, dans une parabole donnée, le *latus rectum* d'un diamètre, trouver le *latus rectum* d'un autre diamètre.

Proposition II. — Étant donné, dans une parabole, le *latus rectum* d'un diamètre, trouver le diamètre dont le *latus rectum* a une longueur donnée.

Propositions III et IV. — Reproduction de la question I, relativement à une hyperbole ou à une ellipse.

Propositions VII et VIII. — Étant donnés l'axe et le *latus rectum* correspondant d'une hyperbole ou d'une ellipse, et la raison de deux diamètres conjugués, trouver ces diamètres en grandeur et en position.

Propositions IX, X, XI, XII, XIII et XIV. — Étant donnés l'axe et le *latus rectum* correspondant d'une hyperbole ou d'une ellipse, et la somme ou la différence de deux diamètres conjugués,

ou le rectangle compris sous eux, trouver les diamètres en grandeur et en position.

Propositions XV et XVI. — Même question, en supposant qu'on donne la somme des carrés des deux diamètres conjugués, pour l'hyperbole, et la différence de leurs carrés pour l'ellipse.

Propositions XVII et XVIII. — Étant donnés l'axe et le *latus rectum* correspondant d'une hyperbole ou d'une ellipse, trouver deux diamètres conjugués qui comprennent entre eux un angle donné.

Propositions XIX et XX. — Étant donnés l'axe et le *latus rectum* correspondant d'une hyperbole ou d'une ellipse, trouver le diamètre dont le *latus rectum* est égal à une longueur donnée.

Propositions XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII et XXVIII. — Étant donnés l'axe et le *latus rectum* d'une hyperbole ou d'une ellipse, trouver le diamètre qui ait avec son *latus rectum* une raison donnée, ou qui, avec son *latus rectum*, donne une somme ou une différence égale à une longueur donnée, ou qui, avec son *latus rectum*, fasse un rectangle donné.

Propositions XXIX et XXXI, XXXII et XXXIII. — Étant donnés l'axe et le *latus rectum* correspondant d'une hyperbole ou d'une ellipse, trouver le diamètre dont le carré donne, avec celui de son *latus rectum*, une somme ou une différence donnée.

Nous n'avons malheureusement pas le texte des solutions données par Apollonius de toutes ces questions, qui dépendent chacune de la résolution d'équations du premier et du second degré.

Il est présumable qu'il se proposait de ramener chacun de ces problèmes aux problèmes contenus dans les *Éléments* d'Euclide.

Mais il devait nécessairement, pour cela, effectuer certaines

combinaisons entre les équations qu'il avait à résoudre. Il eût été très intéressant de connaître ces combinaisons.

DES PROGRÈS INTRODUITS PAR APOLLONIUS DANS LES MÉTHODES ARITHMÉTIQUES.

Nous avons déjà dit un mot de l'ouvrage, aujourd'hui complètement perdu, qu'Apollonius avait consacré aux méthodes de calcul arithmétique. Nous ne pouvons ajouter à ce que nous en avons dit que quelques indications fournies par Pappus.

Il paraît qu'Apollonius avait eu l'idée de prolonger la numération écrite en réemployant, pour les quatre ordres d'unités dépassant les mille, puis pour les quatre ordres suivants, et ainsi de suite, les notations des nombres jusqu'à 9999, et de séparer, à partir de la droite, par des points, les figures des nombres de quatre chiffres au plus.

Il avait aussi indiqué la manière de substituer, dans les multiplications, les opérations sur les nombres de dizaines, de centaines et de mille, dans chaque classe de nombres de quatre chiffres, par les opérations correspondantes sur les nombres moindres que 10, sauf à tenir compte de la place à donner à chaque produit, comme nous le faisons aujourd'hui, de façon à éviter l'emploi des 27 lettres de l'alphabet, et à n'opérer jamais que sur les 9 premières.

Malheureusement la plus grande partie des commentaires de Pappus sur les travaux arithmétiques d'Apollonius est absolument perdue, en sorte que nous n'en pouvons dire davantage.

Peut-être Apollonius avait-il au moins ébauché la théorie des règles de l'arithmétique vulgaire.

CTÉSIBIUS.

(Né à Alexandrie vers — 180.)

Il était fils d'un barbier et exerça quelque temps la profession de son père. Il devint ensuite célèbre par d'ingénieuses inventions mécaniques; on lui attribue entre autres celle de la pompe aspirante et foulante, celle d'une sorte de fusil à vent pour lancer des traits et celle d'une horloge d'eau. On croit qu'il était le père de Héron l'Ancien.

HÉRON L'ANCIEN.

(Né à Alexandrie vers — 155.)

On le croit fils de Ctésibius, dont au moins il fut le disciple. Il est connu par l'invention de l'éolipyle et surtout du curieux appareil connu sous le nom de *fontaine de Héron*. Il reste de lui des fragments d'un ouvrage intitulé les *Pneumatiques*, un *Traité des projectiles* et deux livres sur les *Automates*.

Je croyais avoir rendu à Héron l'Ancien, en ces cinq lignes écrites depuis longtemps, tout ce qui lui est dû. Mais tout le monde, maintenant, s'accorde à lui attribuer un ouvrage beaucoup plus important que les précédents, au point de vue de la théorie, et qui présenterait un grand intérêt historique, si l'on pouvait lui accorder, ce que je ne crois pas, l'antiquité qu'on lui suppose : C'est le *Traité de la Dioptre* (Περι Διοπτρας), dont il existait trois

exemplaires manuscrits, assez dissemblables, l'un à la Bibliothèque Nationale, l'autre à la bibliothèque de Strasbourg et le troisième à la bibliothèque de Vienne.

Montucla n'avait pas eu connaissance de cet ouvrage. C'est M. Venturi qui l'a découvert et fait connaître, dans sa *Storia dell' Ottica*, publiée à Bologne en 1814.

Montucla ne mentionne que la *Géodésie* de Héron le Jeune, et voici ce qu'il en dit : « Cette Géodésie n'est d'aucune importance. Remarquons cependant qu'on y trouve la méthode ingénieuse de mesurer la surface d'un triangle rectiligne par la connaissance seule des trois côtés, sans rechercher la perpendiculaire ; mais Héron la donne sans démonstration, et il est probable qu'elle est l'ouvrage de quelque mathématicien antérieur et plus profond. »

J'ai été fort surpris, il y a une quinzaine d'années, de trouver dans l'*Aperçu historique* de M. Chasles le passage suivant, page 431 :

« Mais nous devons convenir ici que ce théorème (sur l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés), qui est resté inaperçu dans l'histoire de l'école d'Alexandrie, y a été connu. On le trouve démontré dans un traité de Géodésie de Héron l'Ancien (deux siècles avant l'ère chrétienne), intitulé la *Dioptre* ou le *Niveau*, que M. Venturi, de Bologne, a traduit, il y a une vingtaine d'années, sous le titre *Il Traguardo*, dans son *Histoire de l'Optique*. »

L'idée qu'un géomètre de l'école d'Alexandrie, presque contemporain d'Euclide, fût arrivé à exprimer l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés par la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

tandis qu'on ne pourrait pas citer un auteur grec qui ait donné pour l'aire du rectangle la formule

$$S = bh,$$

cette idée m'avait paru être de M. Chasles, et j'avais cru pouvoir admettre que la Géodésie de Héron l'Ancien n'était autre que celle de Héron le Jeune qui vivait au VIII^e siècle suivant Montucla, et au VII^e suivant M. Chasles. J'avais pensé que les deux ouvrages n'en faisaient qu'un, que Héron le Jeune était l'auteur de la *Dioptre*, et que la *Géodésie* qui lui était attribuée n'était qu'une mauvaise et défectueuse copie de son ouvrage.

Mais l'idée était de M. Venturi, qui s'appuie, pour l'établir, sur l'aveu, par Héron le Jeune, des nombreux emprunts qu'il aurait faits à Héron l'Ancien, aveu qui se trouverait dans la traduction par Barocci de la *Géodésie* de Héron le Jeune.

Il est vrai qu'il existe trois Géodésies de Héron le Jeune : la première, celle de Barocci, qui ne contient pas le théorème sur l'aire du triangle; la deuxième, plus abrégée, dont M. Venturi possédait une copie manuscrite (*la seconda ristretta e breve, della quale posseggo una copia manoscritta*), et la troisième, différente de la première et plus complète que la deuxième, dont Dasipodius a publié diverses parties en 1579 (*la terza diversa affatto dalla prima, e più diffusa assai della seconda; il Dasipodio ne pubblicò alcuni tratti in-8° del 1579*). Ces deux dernières contiennent le théorème, mais sans démonstration, selon l'usage de l'auteur, dit M. Venturi (*secondo l'uso del loro Autore*).

Ainsi il existait trois copies manuscrites assez dissemblables entre elles du *Traité de la Dioptre* (l'une d'elles est très incomplète), et l'on a trois éditions encore plus discordantes de la

Géodésie; et l'une de ces trois contient une mention d'emprunt. Cette mention peut-elle constituer une preuve historique? Cet aveu permet-il de trancher la question? Peut-on en conclure que le *Traité de la Dioptre* soit certainement de Héron l'Ancien, et que Héron le Jeune n'ait fait que copier plus ou moins maladroitement l'ouvrage de son homonyme, en l'abrégeant?

Il ne me paraît pas que les circonstances soient de nature à autoriser des conclusions si formelles, parce que, dans l'hypothèse où les deux ouvrages n'en feraient qu'un, où le second ne serait qu'une mauvaise copie du premier, il ne serait pas bien difficile d'admettre qu'un copiste, rencontrant deux ouvrages distincts sous certains rapports et pareils sous d'autres, et s'expliquant d'autant moins le fait que tous deux portaient le même nom d'auteur, ait attribué l'un à l'un des Héron et l'autre à l'autre; le plus complet, naturellement, à Héron l'Ancien et l'abrégé à Héron le Jeune; il serait encore moins étonnant que le copiste eût inséré dans la *Géodésie* une mention des emprunts faits à la *Dioptre,* et qu'un autre copiste eût attribué plus tard cette mention à l'auteur présumé des emprunts. Les altérations de textes ne sont malheureusement pas assez rares dans les anciens manuscrits pour qu'une pareille hypothèse soit invraisemblable.

Enfin M. Cantor, dans son *Histoire des Mathématiques,* adopte aussi l'opinion de M. Venturi, fondée sur les mêmes motifs et sur les mêmes textes.

Je crois qu'il convient de rechercher dans l'ouvrage lui-même l'époque à laquelle il peut avoir été écrit, et que l'on sera fondé à rejeter une hypothèse, même appuyée sur des textes précis, si cette hypothèse ne présente que des invraisemblances plus choquantes les unes que les autres.

Or, je pense qu'il suffira de donner une analyse de la *Dioptre* pour rendre évidente l'impossibilité de l'attribuer à Héron l'Ancien.

Mais, avant de présenter cette analyse, je crois devoir constater que tout le monde est à peu près d'accord sur l'époque à laquelle vivait Héron l'Ancien. J'ai déjà cité l'opinion de M. Chasles, qui le place vers l'an — 200; M. Venturi suppose qu'il vivait un peu plus d'un siècle avant Jésus-Christ; M. Cantor le rajeunit de quelques années, et je place sa naissance vers — 155. Toutes ces hypothèses s'accordent à peu près, ou du moins les différences qu'elles présentent sont insignifiantes, en ce que toutes placent Héron l'Ancien au moins 220 ans avant Ptolémée, ce qui constitue l'une des difficultés qu'il y a à admettre qu'il puisse être l'auteur de la *Dioptre*.

Voici l'analyse de l'ouvrage qui nous occupe :

C'est un traité de Géodésie où se trouvent indiquées les solutions, à l'aide de la dioptre, d'un grand nombre de questions de Géométrie pratique telles que : mesurer la différence de niveau de deux points visibles ou invisibles l'un de l'autre; trouver la distance d'un point accessible à un point inaccessible ou celle de deux points inaccessibles; mener d'un point donné une perpendiculaire sur une droite dont on ne peut approcher; prolonger une droite au delà d'un obstacle; donner au terrain une pente déterminée ou la forme d'une calotte sphérique; mesurer la surface d'un champ sans y pénétrer, etc.

L'ouvrage débute par la description de la dioptre.

Cette dioptre se compose d'abord d'un support formé d'une colonne qu'on rend verticale au moyen d'un fil à plomb et qui repose sur le sol par trois pieds dont les extrémités forment un

triangle équilatéral. Cette colonne est terminée à sa partie supérieure par un plateau circulaire horizontal fixe, centré avec la colonne et qui porte un cylindre vertical mobile autour de son axe, centré aussi avec la colonne.

Ce cylindre est entouré près de sa base d'une roue dentée qui fait corps avec lui, et qui engrène avec une vis sans fin portée par de petits supports fixés au plateau. En agissant sur la tête de la vis sans fin, on produit un mouvement de rotation du cylindre autour de son axe, aussi minime qu'on le veut. Le petit cylindre se termine à sa partie supérieure par un chapiteau dorique.

Ce chapiteau porte sur sa face supérieure deux petits supports auxquels est adaptée une nouvelle vis sans fin horizontale qui sert à mettre en mouvement autour de son centre et dans son plan vertical qui, prolongé, passerait par l'axe de la colonne, une demi-roue dentée de grande dimension, portée sur deux supports de hauteur convenable, fixés au chapiteau dorique. Le diamètre qui termine cette demi-roue est habituellement horizontal, mais la vis sans fin dont il vient d'être parlé en dernier lieu permet de donner à ce diamètre une inclinaison plus ou moins grande sur l'horizon.

Une grande circonférence divisée en 360° et parties de degré est fixée à la demi-roue un peu au-dessus de son diamètre, dans un plan parallèle à ce diamètre et perpendiculaire à celui de la demi-roue, c'est-à-dire dans un plan horizontal lorsque le diamètre de la demi-roue est lui-même horizontal, mais qui s'incline sur l'horizon en même temps que ce diamètre.

Enfin la dioptre proprement dite est portée par cette grande circonférence sur laquelle elle forme comme un diamètre.

C'est un tube de verre recourbé à angles droits à ses deux extrémités, qui forme à la fois niveau d'eau et alidade.

Ainsi la première vis sans fin sert à amener l'alidade dans le plan vertical passant par l'axe de la colonne et par l'objet que l'on veut viser, et la seconde vis sans fin sert à diriger, dans ce plan, l'alidade vers l'objet.

L'instrument a des dimensions imposantes, car le diamètre de la grande circonférence est de quatre coudées; quant au dessin qui le représente, il est fait pour en donner une idée fort avantageuse.

Au reste, en terminant sa description, M. Venturi ajoute : « On voit que l'instrument de Héron avait une grande ressemblance avec les modernes théodolites. (*Si vede che l'Istromento di Erone avea molta somiglianza coi moderni Teodoliti.*) »

J'admets tout cela; car M. Venturi nous affirme que sa traduction est aussi fidèle que le permettaient le génie de sa langue, le style des géomètres modernes et les erreurs de sa copie. (*Ho posto cura che la traduzione riuscisse cosi fedele, come permettevano il genio della nostra lingua, lo stile de' moderni Geometri, e gli errori della mia Copia, egualmente che del Manoscritto di Strasburgo.*) Car il a collationné les deux manuscrits. J'admets tout cela, dis-je, non sans étonnement, il est vrai, mais à la condition que l'aventure ne se passe pas deux siècles et demi avant Ptolémée, à moins qu'on ne découvre bientôt que la dioptre de l'auteur de l'*Almageste* était un cercle répétiteur de Borda, divisé par un des Gambey, dont il existait un si grand nombre à Alexandrie en l'an 150, et muni d'une lunette de Galilée à laquelle Picard avait ajouté un réticule et Auzout un micromètre.

Mais l'hypothèse que Héron l'Ancien ait trouvé vers — 100

la formule de l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés me paraît présenter des invraisemblances encore plus grandes.

Ces invraisemblances sautent tellement aux yeux que M. Libri, partagé entre le désir de reprendre M. Chasles, ce dont il ne manque jamais les occasions qu'il rencontre assez fréquemment, et l'ennui de contredire son compatriote, en vient à supposer que le théorème en question, si le Περι Διοπτρας était l'œuvre de Héron l'Ancien, aurait été intercalé par quelque Alexandrin.

« Nous ne savons pas d'une manière certaine, dit-il, tome II, page 481, si cet ouvrage est celui d'Héron l'Ancien, et si en tout cas il ne contient pas des interpolations faites par ces mêmes Alexandrins, qui ont attribué à Archimède le petit écrit sur l'analyse indéterminée dont j'ai parlé précédemment.

« Mais il me semble difficile que ce beau théorème se fût trouvé dans un ouvrage aussi ancien que celui du premier Héron, sans qu'aucun géomètre grec eût songé à le citer. »

En effet, comment pourrait-on admettre, par exemple, que Pappus, qui a donné un extrait des *Mécaniques* de Héron l'Ancien dans le huitième livre de ses *Collections mathématiques*, n'eût pas jugé à propos de dire un seul mot du théorème dont il s'agit? Mais surtout comment pourrait-on expliquer le silence gardé sur ce même théorème par Proclus, qui prend la peine de discuter la convenance d'une réduction proposée par Héron l'Ancien dans le nombre des axiomes admis par Euclide ?

Comment M. Venturi n'a-t-il pas vu que ces deux faits, qu'il rapporte lui-même, étaient inconciliables avec son hypothèse?

Mais cette hypothèse me paraît encore bien plus inadmissible qu'à M. Libri, et pour des raisons bien plus considérables.

Non seulement on ne trouve dans aucun ouvrage grec, autre

que la *Dioptre*, la formule de la mesure de l'aire d'un triangle en fonction des mesures de ses côtés, mais on n'y trouve même pas la formule de cette mesure en fonction des mesures de la base et de la hauteur; et il y a à cela une excellente raison, c'est que la formule

$$S = \tfrac{1}{2} bh$$

suppose que l'on prenne pour unité de surface le carré construit sur l'unité linéaire, convention qui n'a rien d'obligatoire, qu'il faut au moins mentionner quand on la fait, que Héron le Jeune a bien pu tenir des Hindous, mais qui n'est indiquée dans aucun auteur grec antérieur à Héron l'Ancien.

D'un autre côté, si Ptolémée avait connu l'expression de l'aire d'un triangle sous la forme

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

à plus forte raison l'aurait-il connue sous la forme plus simple

$$S = \tfrac{1}{2} bh = \tfrac{1}{2} bc \tfrac{1}{2} \text{corde}\, 2\,\text{A} = \tfrac{1}{4} bc \,\text{corde}\, 2\text{A};$$

mais alors la comparaison des deux formules lui eût fourni immédiatement le théorème

$$\text{corde}\, 2\text{A} = 4 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

Or cette formule se trouve-t-elle dans Ptolémée qui, pour résoudre le moindre triangle, le décompose toujours en deux triangles rectangles?

On ne peut donc attribuer le théorème à Héron l'Ancien sans rejeter Ptolémée dans les catacombes intellectuelles.

On n'a pas assez remarqué que la maladresse avec laquelle les

anciens établissent les équations dont ils se servent, tient essentiellement à ce qu'ils n'ont pas les formules des mesures des surfaces et volumes, dont les équivalences nous fournissent beaucoup plus souvent des relations entre les éléments linéaires des figures que les circonstances de position ou de similitude que ces éléments peuvent présenter.

Il y a contradiction à leur faire cadeau des formules des mesures en leur laissant leur maladresse; et les Grecs, s'ils pouvaient revenir, seraient les premiers à rejeter un présent aussi injurieux pour leur intelligence.

Quant à l'hypothèse d'une interpolation faite au *Traité de la Dioptre* par quelque copiste, M. Venturi, qui ne la connaissait pas, y répond par avance par les éloges qu'il donne à la démonstration de son auteur.

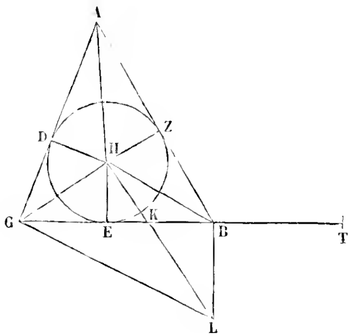
« La démonstration, dit-il, que j'ai rapportée de Héron l'Ancien, non seulement est plus facile que celles des trois frères (les fils de Musa), reproduite par Pacioli et les géomètres du XVI^e^ et du XVII^e^ siècle, mais elle ne le cède en élégance et en simplicité à aucune autre plus récente, pas même à celle d'Euler ni à celle de Boscowich. »

« La Dimostrazione che ho riportata d'Erone l'Antico, non solo è più facile di quella dei tre Fratelli, ripetuta poi da Pacioli e dai Geometri del XVI e XVII secolo; ma in oltre essa non la cede neppure in eleganza e simplicità a veruna delle più recenti; non a quella di Euler, e non a quella di Boscowich. »

Voici la démonstration du théorème, telle que la donne M. Venturi; elle est évidemment arrangée par lui dans le goût moderne, mais il est facile de restituer par la pensée les longues périphrases que devait employer l'auteur grec.

Soit (*fig.* 30) le triangle ABG, et soit donné chacun de ses

Fig. 30.



côtés. Inscrivons-lui le cercle DEZ dont le centre est H, et joignons HA, HB, HG, HD, HE, HZ: le double du triangle BHG sera

$$BG \times HE;$$

de même les doubles des triangles AHB et AHG seront respectivement

$$AB \times HZ \quad \text{et} \quad AG \times HD.$$

donc le produit du périmètre du triangle par le rayon du cercle est le double de ce triangle. Prolongeons GB d'une longueur BT égale à AD; GT sera la moitié du périmètre du triangle; donc l'aire de ce triangle sera

$$GT \times HE = \sqrt{\overline{GT}^2 \times \overline{HE}^2}.$$

Menons HKL perpendiculaire à HG, BL perpendiculaire à GB, et joignons GL.

(Il n'est pas inutile de remarquer que toutes les lettres viennent

dans l'ordre alphabétique grec, sauf que M. Venturi aura sans doute remplacé Θ par T).

Les deux angles GHL et GBL étant droits, les quatre points G, H, B, L sont sur un même cercle, et

$$HLG = HBG;$$

d'un autre côté, comme

$$HLG + HGL = 1 \text{ droit},$$

il en résulte, en remplaçant HLG par HBG, et décomposant HGL en HGB plus BGL,

$$HBG + HGB + BGL = 1 \text{ droit};$$

mais les trois angles HGE, HBE et HAD forment aussi un droit; donc

$$HAD = BGL,$$

et les deux triangles HAD, GBL sont semblables. Par conséquent

$$GB : BL :: AD : DH \quad \text{ou} \quad :: BT : HE;$$

ou, en changeant l'ordre des moyens,

$$GB : BT :: BL : HE \quad \text{ou} \quad :: BK : KE,$$

à cause de la similitude des triangles BKL et EKH; d'où, en ajoutant les conséquents aux antécédents,

$$GT : BT :: BE : KE;$$

et, en multipliant les termes du premier rapport par GT et ceux du second par GE

$$\overline{GT}^2 : GT \times BT :: GE \times BE : GE \times KE;$$

d'où

$$\overline{GT}^2 \times GE \times KE = GE \times BE \times GT \times BT.$$

Mais dans le triangle rectangle GHK,

$$GE \times KE = \overline{HE}^2;$$

donc

$$\overline{GT}^2 \times \overline{HE}^2 = GE \times BE \times GT \times BT.$$

Mais $\overline{GT}^2 \times \overline{HE}^2$ est le carré de l'aire S du triangle; donc

$$S = \sqrt{GE \times BE \times GT \times BT};$$

or, GT est le demi-périmètre du triangle, GE est le demi-périmètre diminué de AB, et de même BE et BT sont respectivement égaux à ce demi-périmètre diminué de AG et de GB; donc

$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - AG)(p - BG)}.$$

M. Chasles ne trouve à cette démonstration, pour être du IIe siècle avant Jésus-Christ, qu'un petit défaut : c'est d'introduire un produit de quatre lignes, « locution inusitée, dit-il, dans la Géométrie des Grecs, où le produit de deux ou de trois lignes avait une signification géométrique, mais non le produit de quatre lignes ». Dans quel auteur grec M. Chasles a-t-il donc vu des produits de trois ou seulement de deux lignes? Il n'y en a même pas encore dans Pappus.

Quant à M. Cantor, non seulement il ne fait aucune objection, mais il discute la question de savoir si la proposition est de Héron l'Ancien ou d'un géomètre antérieur. Il distingue alors entre le théorème et la démonstration. Le théorème, dit-il, pourrait être d'un géomètre antérieur, mais la démonstration est de Héron.

Je crois la discussion aussi superflue que la distinction.

En résumé, je ne crois pas du tout que le *Traité de la Dioptre*

soit de Héron l'Ancien, et si l'on ne veut pas qu'il soit de Héron le Jeune, alors il faudra, je pense, chercher un troisième Héron.

Faute d'autre hypothèse, je continuerai à attribuer le *Traité de la Dioptre* à Héron le Jeune.

PHILON DE BYZANCE.

(Né vers — 150.)

Donna une solution du problème des deux moyennes proportionnelles. Il reste de lui le quatrième et le cinquième livre d'un traité de *Poliorcétique*, publié en 1693 avec traduction latine dans la collection des *Veterum mathematicorum*. On y trouve la description d'une sorte de fusil à vent qui pourrait être la machine de Ctésibius.

TROISIÈME PÉRIODE.

D'HIPPARQUE, né en — 150;
à DIOPHANTE, né en 325.

Noms des savants de cette Période.

	Né en	Mort en
Hipparque	— 150	
Possidonius	— 135	— 49
Nicomède	— 100	
Geminus	— 95	
Vitruve	— 85	— 26
Cléomède	— 80	
Sosigène	— 80	
Dionysidore	— 20	
Manilius	— 10	
Sérénus	— 10	
Pline	23	79
Théodose	40	
Nicomaque	50	
Ménélaüs	80	
Théon (de Smyrne)	120	
Dioscoride	120	185
Ptolémée	128	168
Galien	130	
Sextus Empiricus	200	
Eusèbe (de Césarée)	264	338
Zénodore	290	
Théon (d'Alexandrie)	320	

TROISIÈME PÉRIODE.

C'est dans cette période que commencent à prendre corps les méthodes pour l'évaluation numérique, dans certains cas particuliers, de grandeurs géométriques définies par des figures qui ne pourraient pas les fournir d'une façon utile.

Bien entendu, il n'est pas encore question de substituer aux spéculations sur les grandeurs elles-mêmes des spéculations équivalentes sur leurs mesures, par rapport à une unité indiquée par la nature de la question, ni, à plus forte raison, arbitraire.

C'est toujours la considération des grandeurs elles-mêmes, prises dans la figure qu'elles forment, qui fournit les relations qui peuvent exister entre ces grandeurs ; et ces relations reçoivent d'abord une expression concrète.

Mais ces grandeurs dépendant toutes de l'une d'entre elles, ce qui constitue la particularité du cas, on peut se proposer d'obtenir la raison de chacune d'elles à celle dont elles dépendent, ce qui permettrait au besoin de la construire directement, mais présentera deux avantages beaucoup plus considérables : le premier, que

l'évaluation numérique pouvant toujours comporter une approximation aussi grande qu'on le voudrait, on réduira autant qu'on le voudra les erreurs que laisseraient nécessairement subsister des constructions, qui du reste pourraient être impossibles, si les grandeurs cherchées étaient trop petites ou trop grandes; le second, que chaque évaluation numérique déjà obtenue pourra fournir les éléments du calcul d'une nouvelle grandeur inconnue.

Quant à la méthode, nous l'avons déjà vu mettre en pratique par Aristarque de Samos et par Archimède dans un cas, et il suffira de quelques mots pour la caractériser complètement.

Si l'on connaît la raison exacte de deux côtés d'un triangle rectangle et qu'on veuille connaître celle du troisième à l'un de ces deux, on divisera l'un de ces deux en un grand nombre de parties égales, dont l'une soit exactement contenue dans l'autre ; la propriété fondamentale du triangle rectangle fera connaître le nombre de petits carrés, ayant chacun pour côté une des divisions, qui seraient contenus dans le carré construit sur le côté inconnu, et, par des tâtonnements plus ou moins méthodiques, on trouvera approximativement le nombre des divisions contenues dans ce côté.

Si l'on veut évaluer la longueur qui aurait une raison donnée, avec une longueur donnée contenant un certain nombre de divisions de la ligne principale, on multipliera ce nombre par l'antécédent de la raison et on divisera le résultat par le conséquent. On aura ainsi l'équivalent de la construction d'une quatrième proportionnelle.

Si deux rectangles sont égaux (équivalents), que l'on divise l'un des côtés de l'un en un très grand nombre de parties égales, et que l'on obtienne approximativement les nombres de fois

qu'une des divisions est contenue dans les autres côtés, le produit des nombres de divisions contenues dans les côtés de l'un des rectangles sera à peu près égal au produit des nombres de divisions contenues dans les côtés de l'autre rectangle, parce que ces produits donneront, à peu près, le nombre de fois que les deux rectangles contiennent le carré construit sur une des divisions.

Si trois des côtés étaient donnés en nombres. on aurait le quatrième par une multiplication et une division.

Si l'on connaît les nombres de divisions égales que contiennent deux longueurs, et qu'on veuille connaître le nombre de ces mêmes divisions que contiendrait leur moyenne proportionnelle. on le déduira par tâtonnements du nombre de carrés, ayant pour côté une des divisions, que contiendrait le carré construit sur la moyenne proportionnelle, etc.

Ces considérations, dans l'esprit des Grecs, n'ont aucunement pour objet les progrès de la Géométrie, qu'elles feraient plutôt rétrograder. Elles pourraient se rapporter à une méthode primitive d'arpentage, mais elles n'ont en réalité d'autre but que de permettre l'évaluation numérique de certaines longueurs, ou le calcul de certaines raisons.

C'est à l'aide de ces considérations que les astronomes grecs sont parvenus à construire leurs tables des cordes des arcs d'un cercle, rapportées au rayon.

Leur point de départ, dans la construction de ces tables, consiste dans une interprétation de ce théorème sur le quadrilatère inscrit que le rectangle construit sur les diagonales est égal à la somme des rectangles construits sur les côtés opposés, d'où il résulte que si les côtés du quadrilatère et ses diagonales étaient, avec une approximation suffisante, évalués en parties du rayon, di-

visé en un grand nombre de parties égales, le produit des nombres de divisions contenues dans les diagonales serait égal à la somme des produits des nombres de divisions contenues dans les côtés opposés.

On doit remarquer ici que les géomètres grecs ayant toujours en vue les grandeurs concrètes et n'abandonnant jamais ce point de vue dans leurs calculs, il ne leur serait pas venu à l'esprit de se demander si un produit est continu avec ses facteurs, c'est-à-dire si, lorsqu'une règle se promène parallèlement à elle-même, les segments qu'elle intercepte sur deux droites varient d'une manière continue; si le nombre de divisions contenues dans la moyenne proportionnelle entre deux longueurs, divisées en parties égales, varie continuement avec les nombres de divisions égales des deux longueurs, etc.

Il faudra que les arithméticiens se soient emparés de l'attention publique pour que les questions de ce genre prennent naissance.

Les géomètres grecs admettent, sans démonstrations, que les petites erreurs commises dans les mesures des données en entraînement de petites dans l'évaluation des résultats, et ils prouvent ainsi que leur bon sens n'est pas encore oblitéré.

Leur numération se prêtant difficilement aux calculs, les Grecs avaient imaginé de diviser le rayon en 60 parties, appelées degrés, chaque degré en 60 parties appelées minutes, chaque minute en 60 parties appelées secondes, etc.; mais ils n'allaient guère au delà des secondes.

Ainsi le rayon valait 60°, ou $3600'$, ou $216\,000''$; et toutes leurs évaluations des cordes se faisaient de même en degrés, minutes et secondes.

Ils savaient parfaitement que pour multiplier une somme on

peut multiplier les parties de cette somme et ajouter les produits; que pour multiplier par une somme on peut multiplier par les parties de cette somme et ajouter les produits; que pour diviser une somme on peut diviser les parties et ajouter les quotients; que si la division de la partie principale de la somme a laissé un reste, il faut le reporter aux parties suivantes en le convertissant en fractions sexagésimales de même espèce, etc.

Moyennant quoi, ils n'avaient jamais à opérer que sur des nombres moindres que 60.

Ils auraient dû, pour faciliter leurs calculs, construire une table des produits deux à deux des 59 premiers nombres. Peut-être chaque calculateur s'en faisait-il une à son usage, mais on ne voit mentionner cette table que beaucoup plus tard dans les œuvres de Lansberge.

Jusqu'à Théon d'Alexandrie, on extrayait les racines carrées en essayant des carrés les uns trop petits et les autres trop grands. C'est Théon qui a donné la règle que nous suivons encore aujourd'hui.

Théon commence par commenter le théorème d'Euclide relatif au carré construit sur une ligne AC composée de deux parties AB et BC. Ce carré se compose du carré construit sur AB, de deux fois le rectangle compris sous AB et BC et du carré construit sur BC.

Il remarque que si AB et BC sont exprimés, par exemple, en minutes, le carré construit sur AC contiendra le carré d'une minute un nombre de fois égal au carré de la somme des deux nombres de minutes, mais que ce même nombre de carrés d'une minute se retrouverait en ajoutant le carré du nombre de minutes contenues dans AB, le double du produit des nombres de minutes

contenues dans AB et dans BC, enfin le carré du nombre de minutes contenues dans BC, parce que ces trois derniers nombres seraient les nombres de carrés d'une minute contenus dans les carrés et rectangles qui composent le carré construit sur AC.

Donc le carré de la somme de deux nombres se compose du carré du premier, de deux fois le produit du premier par le second et du carré du second.

C'est le début de cette théorie que nous avons appelée *application de la Géométrie à l'Algèbre.*

Théon remarque ensuite que, si on a pris la racine d'un carré contenu dans le nombre dont on veut extraire la racine, et qu'on ait retranché du nombre proposé le carré de la partie trouvée à la racine, il restera le double produit de cette partie trouvée à la racine par la seconde partie, plus le carré de cette seconde partie, plus d'autres parties formant le reste, etc.

Mais il sera plus court de reproduire l'exemple lui-même sur lequel Théon explique sa méthode : soit à extraire la racine carrée de 4500^{oq} (c'est-à-dire 4500 fois le carré construit sur un degré).

$$\begin{array}{rl|l}
4500^{oq} & & \;67^{o}4'55'' \\ \cline{3-3}
\underline{4489} & & 134^{o} \\
11^{oq}, & \text{ou} & 660^{o\prime} \\
 & & \underline{536^{o\prime}\,16'^{q}} \\
 & & 123^{o\prime}\,44'^{q}, \quad \text{ou} \quad 7424''^{q}.
\end{array}$$

Le plus grand carré contenu dans 4500 est 4489, dont la racine est 67 (Théon le trouve sans doute par des tâtonnements, qu'il ne mentionne pas) ; le côté du carré contient donc 67^{o} ; Théon retranche 4489^{oq} de 4500^{oq}, ce qui donne 11^{oq} ou 660 rectangles

ayant pour côtés un degré et une minute, ce que j'écris $660^{\circ\prime}$. Il divise $660^{\circ\prime}$ par 134° (double de 67°), ce qui donne $4'$. Il forme alors le produit de

$$134^{\circ}4' \text{ par } 4',$$

ce qui donne

$$536^{\circ\prime} \quad \text{et} \quad 16^{\prime q}$$

qu'il retranche de $660^{\circ\prime}$, ce qui donne, en empruntant des $660^{\circ\prime}$ un degré minute, qui vaut $60^{\prime q}$,

$$123^{\circ\prime} \text{ et } 44^{\prime q};$$

mais $123^{\circ\prime}$ valent

$$123 \times 60 = 7380^{\prime q},$$

auxquels il faut ajouter les $44^{\prime q}$, ce qui fait

$$7424^{\prime q}.$$

Il reste à diviser $7424^{\prime q}$ par $134^{\circ}8'$. Théon trouve $55''$ (probablement en réduisant les $7424^{\prime q}$ en 7424×60 minutes secondes et les $134^{\circ}8'$ en minutes).

Il multiplie alors $134^{\circ}8'55''$ par $55''$, ce qui donne des degrés secondes, des minutes secondes et des secondes carrées; il retranche le résultat des $7424^{\prime q}$ et obtient un reste auquel il se tient.

Mais le même procédé de calcul pourrait être poursuivi indéfiniment.

LA TRIGONOMÉTRIE DES GRECS.

Nous avons indiqué le point de départ de cette nouvelle théorie, les procédés de calcul arithmétique qui pouvaient en faciliter l'utilisation pratique et les règles élémentaires d'Algèbre qui de-

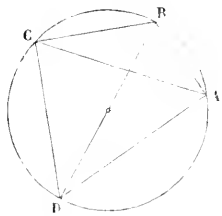
vaient servir à établir ces procédés. Il nous reste à faire connaître la théorie elle-même, telle que la constituèrent Hipparque et Ptolémée.

Soient (*fig.* 31)

AB et BC les cordes de deux arcs d'un cercle O,
AC la corde de la somme de ces deux arcs,
BD le diamètre,
AD et CD les cordes des arcs supplémentaires des premiers;

le rectangle fait sur AC et BD est égal à la somme des rectangles

Fig. 31.



faits sur AB et CD et sur BC et AD; que BD soit divisé en un grand nombre de parties égales et que l'on connaisse les nombres de fois qu'une de ces divisions est contenue dans AB et dans BC, on pourra connaître le nombre de ces mêmes divisions que contiendra AC. En effet, on pourra d'abord connaître les nombres de divisions contenues dans AD et dans CD, au moyen des deux triangles rectangles BAD et BCD, comme cela avait été fait par Aristarque de Samos et Archimède; et si les longueurs sont remplacées par leurs évaluations en nombres, on aura

$$AC \times BD = AB \times DC + BC \times AD;$$

doù

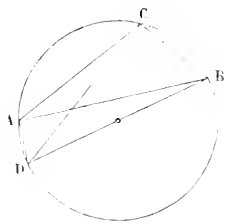
$$AC = AB \times DC + BC \times AD \text{ divisé par } BD.$$

c'est-à-dire : La corde de la somme de deux arcs est égale au quotient par le diamètre de la somme des produits de chacune des cordes des deux arcs, multipliée par la corde du supplément de l'autre.

La même proposition de Géométrie qui donnait la formule de la corde de la somme de deux arcs donnait aussi celle de la corde de leur différence.

En effet, soient AB et BC (*fig* 32) les deux arcs proposés, dont

Fig. 32.



la différence est AC; menons le diamètre BD et achevons le quadrilatère ADBC, on aura

$$\text{corde}\,AC.BD = \text{corde}\,AB.\,\text{corde}(180° - BC) \\ - \text{corde}\,BC.\text{corde}(180° - AB).$$

En supposant égaux les deux arcs à ajouter, la formule fondamentale donne

$$\text{corde}\,2\,AB.\text{diamètre} = 2\,\text{corde}\,AB.\text{corde}(180° - AB),$$

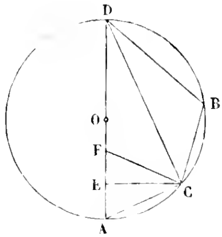
ou

$$\text{corde}\,2AB = \frac{\text{corde}\,AB.\text{corde}(180° - AB)}{\text{rayon}}.$$

Ptolémée aurait pu tirer de là la corde AB au moyen de la corde 2AB; mais il s'y prend autrement.

Soient AB (*fig.* 33) l'arc qu'on veut bissecter, et AC sa moitié,

Fig. 33.



il s'agit d'obtenir la corde de AC ; on abaisse CE perpendiculaire au diamètre AD, et l'on prend EF = EA.

On a alors

$$\overline{AC}^2 = AD.AE;$$

mais

$$AE = \tfrac{1}{2}AF = \tfrac{1}{2}(AD - DF) = \tfrac{1}{2}(AD - DB)$$
$$= \tfrac{1}{2}[2R - \text{corde}(180^\circ - AB)];$$

donc

$$\overline{AC}^2 = 2R.\tfrac{1}{2}[2R - \text{corde}(180^\circ - AB)].$$

C'est au moyen de cette formule que, par des bissections répétées, Ptolémée arrive à la corde d'un arc assez petit pour pouvoir former la raison de la progression arithmétique des arcs d'une table suffisamment remplie.

Résolution des triangles rectilignes.

Triangles rectangles. — Considérons d'abord un triangle

Fig. 34.

rectangle ABC (*fig.* 34). Ptolémée avait, pour le résoudre dans tous les cas, les formules

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2,$$

$$B + C = 90^\circ,$$

$$\frac{\text{corde } 2C}{R} = \frac{2AB}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{\text{corde } 2B}{R} = \frac{2AC}{BC}.$$

Triangles obliquangles. — Quant aux triangles quelconques, les Grecs les résolvaient généralement en les décomposant en triangles rectangles, par une des hauteurs, choisie selon la nature des données.

Toutefois, ils connaissaient l'équivalent de la formule

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

qu'ils écrivaient

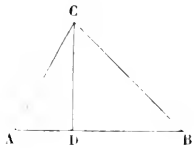
$$\frac{AB}{\text{corde } 2C} = \frac{BC}{\text{corde } 2A} = \frac{CA}{\text{corde } 2B}$$

et démontraient comme nous le faisons.

Cette formule donnait d'elle-même la solution d'un triangle, connaissant un côté et les angles.

Lorsque le triangle était déterminé par deux côtés et l'angle compris, par exemple AC,AB et l'angle A (*fig.* 35), on calculait

Fig. 35.



d'abord AD et CD. Connaissant AD, on connaissait DB. Alors on n'avait plus qu'à calculer l'hypoténuse CB du triangle rectangle CDB, dont on connaissait les deux côtés de l'angle droit.

Étant donnés deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, AC, BC et l'angle A, on calculait d'abord AD et CD, comme dans le cas précédent; on calculait ensuite BD, dans le triangle rectangle CDB, dont on connaissait l'hypoténuse et un côté. On avait ainsi les parties AD et DB du côté AB, et les angles.

Enfin, étant donnés les trois côtés, on calculait les segments de l'un d'eux, pour obtenir ensuite les angles adjacents à ce côté.

Supposons qu'on voulût avoir les segments AD et DB de AB, on avait

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$$

et

$$\overline{DB}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 - \overline{DB}^2 = (AD - DB)(AD + DB) &= (AD - DB)\,AB\\ &= \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2.\end{aligned}$$

ce qui faisait connaître AD — DB et permettait de calculer AD et DB.

On calculait ensuite les angles A et B au moyen des triangles rectangles ACD, BCD, dans chacun desquels on connaissait les deux côtés de l'angle droit.

Trigonométrie sphérique.

Les Grecs connaissaient les formules analogues aux nôtres, qui servent à résoudre les triangles rectangles, mais ils y parvenaient par des procédés tellement détournés et compliqués, que nous renonçons à reproduire leurs démonstrations.

Quant aux triangles sphériques quelconques, ils les décomposaient, pour les résoudre, en triangles rectangles, comme ils avaient fait pour les triangles rectilignes.

Ptolémée a peut-être simplifié ou mieux présenté les deux Trigonométries, mais on trouve dans sa syntaxe la preuve qu'Hipparque était en possession de tous les moyens de résolution des triangles rectilignes et sphériques.

Je ferai remarquer sur cette Trigonométrie un nouvel exemple *d'application de la Géométrie à l'Algèbre.*

Dans le cas où l'on donne les trois côtés d'un triangle rectiligne, Ptolémée, pour résoudre ce triangle, calcule les segments déterminés sur l'un des côtés par la perpendiculaire abaissée du sommet opposé. Il connaît la différence des carrés de ces segments et la somme des mêmes segments; pour connaître la différence de ces segments, il se sert de cette proposition que la différence des carrés de deux nombres est le produit de la somme de

ces nombres par leur différence ; mais il n'aurait aucun moyen de démontrer ce théorème d'Algèbre ; c'est de la Géométrie qu'il le tire, et voici nécessairement comme il raisonne mentalement :

« La différence des carrés de deux nombres entiers (les nombres grecs sont toujours entiers ; ils expriment des degrés, ou des minutes ou des secondes, etc.) donne le nombre des petits carrés qui seraient contenus dans la différence des carrés construits sur deux lignes divisées en parties toutes égales et qui en contiendraient respectivement des nombres égaux aux deux nombres donnés ; mais la différence des carrés construits sur ces lignes est égale au rectangle compris sous leur somme et leur différence, et le nombre des petits carrés contenus dans ce rectangle serait le produit des nombres de divisions de la base et de la hauteur, c'est-à-dire le produit de la somme des deux nombres donnés par leur différence ; donc :

« *La différence des carrés de deux nombres est égale au produit de la somme de ces nombres par leur différence.* »

Progrès de la Géométrie.

Ils consistent essentiellement dans l'invention des deux Trigonométries. Toutefois il faut remarquer la découverte du théorème relatif aux six segments déterminés par une transversale quelconque sur les côtés d'un triangle, théorème qui se trouve dans l'*Almageste*, mais qui est peut-être de Ménélaüs. Ce théorème a été le point de départ de la théorie des transversales.

Progrès de l'Arithmétique.

Ils se réduisent à l'invention de la méthode régulière de calcul pour l'extraction de la racine carrée.

Progrès de l'Astronomie.

Nous nous bornerons ici à rapporter succinctement les résultats des travaux d'Hipparque et de Ptolémée, dont on trouvera plus loin l'histoire.

Hipparque trouvait l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur égale à $23°51'$ avec une faible erreur de $5'$; car, de son temps, elle devait être égale à $23°46'$.

Il trouvait la durée de l'année égale à $365^{j}\frac{1}{4}$ moins $\frac{1}{300}$, avec une erreur en trop de $6^{m}\frac{1}{3}$ seulement.

Il découvrit le phénomène de la précession des équinoxes qu'il faisait de $59''$ par an, au lieu de $50''$.

Il trouva l'apogée du Soleil moins avancé en longitude que le solstice d'été, de $24°30'$, ce qui était exact de son temps; et, pour l'excentricité de l'orbite solaire, $\frac{1}{24}$ au lieu de $\frac{1}{30}$.

Il détermina avec une grande approximation la durée de la révolution synodique de la Lune, ainsi que celles de la révolution anomalistique et de la révolution de la ligne des nœuds; enfin l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique.

Il trouva pour la parallaxe horizontale de la Lune une valeur de $57'$, qui ne s'écarte pas beaucoup de la valeur vraie.

Enfin il détermina avec une grande approximation les durées des révolutions synodiques des cinq planètes connues de son temps.

Ptolémée ne trouva rien à changer à la théorie du Soleil, mais il perfectionna sensiblement celle de la Lune et beaucoup celle des planètes.

Progrès de la Physique.

Ils se réduisent à un commencement d'étude de la réfraction, surtout au point de vue astronomique.

BIOGRAPHIE

DES

SAVANTS DE LA TROISIÈME PÉRIODE

ET

ANALYSE DE LEURS TRAVAUX.

HIPPARQUE.

(Né à Nicée, en Bithynie, vers — 150.)

Pline l'appelle le *Rhodien*, parce que c'est à Rhodes qu'il a fait ses observations et écrit ses principaux ouvrages. Si l'on n'avait pas d'autre preuve du long séjour qu'il fit à Rhodes, on en trouverait une dans ses ouvrages mêmes, qui mentionnent la latitude du lieu où il observait.

Peut-être passa-t-il un temps plus ou moins long à Alexandrie; le fait est douteux; mais il ne paraît pas être allé à Athènes, malgré l'opinion de quelques-uns, car il indique la latitude de cette ville comme la sachant indirectement.

Le seul ouvrage d'Hipparque qui nous soit parvenu, et, malheureusement, celui qu'il nous importait le moins d'avoir, est son commentaire sur le *Poème d'Aratus*, paraphrase versifiée du *Traité des phénomènes* d'Eudoxe; on ne connaît les autres que par ce qu'en rapportent Ptolémée, Théon d'Alexandrie et Pline l'Ancien. Ce sont : le *Traité des levers et des couchers des étoiles;*

le *Traité des couchers simultanés;* un autre intitulé : *De la rétrogradation des points équinoxiaux et solsticiaux;* un *Livre des mois et des jours embolismiques;* douze livres sur la construction d'une *Table des cordes,* lesquels sans doute contenaient la démonstration des formules de Trigonométrie rectiligne et sphérique; enfin un livre sur la *Grandeur de l'année.*

Le *Commentaire d'Aratus* est le début d'Hipparque : Eudoxe ni Aratus n'ayant pris la peine de faire eux-mêmes aucune observation, leurs catalogues d'étoiles étaient remplis d'erreurs énormes. C'est la rectification de ces erreurs qu'Hipparque s'est proposée d'abord. Ce travail préliminaire le força de faire un nouveau catalogue, qui lui servit plus tard dans toutes ses recherches et qui facilita ses importantes découvertes.

Les premiers procédés d'observation qu'il mit en usage, dans ce travail préparatoire, devaient être encore très imparfaits, car un grand nombre des résultats auxquels ils l'ont conduit sont en erreur d'un demi-degré à un degré et demi. On doit penser qu'il perfectionna plus tard ces procédés, car autrement il n'eût pas pu porter les théories du Soleil et de la Lune au point de perfection relative où il les a laissées.

Hipparque commença par imaginer un astrolabe qui suivait et mesurait tous les mouvements de la sphère céleste et lui faisait connaître les coordonnées équatoriales, ascension droite et déclinaison de l'astre observé; il se servait aussi des armilles inventées par Ératosthène, et mesurait les angles au moyen d'un instrument appelé *dioptre*, qui, sans doute, était composé de deux règles pouvant faire entre elles un angle variable au centre d'un cercle divisé.

On voit, par son *Commentaire d'Aratus*, qu'à l'époque où il

s'en occupait il savait déjà réduire les coordonnées équatoriales des astres à leurs coordonnées écliptiques, et réciproquement. En effet, il dit qu'il a démontré, dans son *Traité des levers et des couchers*, la solution des triangles sphériques; d'un autre côté, on voit, par un autre passage de son *Commentaire*, qu'il savait calculer la durée du jour, connaissant la déclinaison du Soleil et la latitude du lieu, problème de Trigonométrie dont la solution exige une théorie en règle; mais, comme nous l'avons déjà dit, on ne peut pas juger Hipparque sur l'ouvrage unique qui nous reste de lui, qui n'était qu'un simple prélude à ses grands travaux, et qui ne contient aucune de ses découvertes astronomiques. C'est seulement par Ptolémée que nous connaissons le plus grand astronome des temps anciens et modernes. Ptolémée le cite fréquemment dans sa *Syntaxe;* il le copie parfois textuellement, il lui emprunte ses méthodes et jusqu'à ses calculs.

Avant Hipparque, les divisions du zodiaque, auxquelles servaient de repères les solstices et les équinoxes, étaient placées au milieu des signes, ce qui était plus naturel au point de vue concret. Hipparque reporta les commencements des signes aux points de division et prit pour origine commune des longitudes et des ascensions droites le point équinoxial du printemps. Cette idée devait naître tout naturellement de l'intention d'appliquer les formules de trigonométrie sphérique à la transformation des coordonnées équatoriales en coordonnées écliptiques, puisqu'elle simplifiait les opérations.

C'est vraisemblablement cette première réforme qui amena les découvertes plus importantes d'Hipparque. En effet, prenant pour origine le point équinoxial du printemps, il dut s'attacher à en déterminer exactement la position dans le ciel.

Il faisait, d'après Ératosthène, l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur égale à $23°51'$: elle est aujourd'hui de $23°27'25''$; mais on sait qu'elle diminue d'environ $48''$ par siècle, d'où l'on conclut qu'elle devait être, du temps d'Hipparque, de $23°46'$.

La première grande découverte d'Hipparque est celle de la précession des équinoxes. Voici comment il y est arrivé : de son temps, l'*Épi de la Vierge* était à 6° Ouest de distance du point équinoxial d'automne, tandis que 122 ans auparavant Timocharis avait trouvé la même étoile à 8° du même équinoxe; la ligne des équinoxes avait donc eu un mouvement de 2° en 122 ans, ou de $59''$ par an, dans le sens du mouvement diurne. Les calculs modernes donnent $50''$.

Hipparque apporta une rectification importante à la valeur acceptée avant lui de la durée de l'année.

Dans son livre *De la durée de l'année*, comparant le solstice d'été observé par Aristarque, à la fin de la cinquième année de la première période calippique, à celui qu'il avait observé lui-même à la fin de la quarante-troisième de la troisième période calippique, Hipparque disait, à ce que rapporte Ptolémée : « Il est donc évident qu'en 145 années le tropique a avancé d'un demi-nychthémère ou de 12 heures. » Dans son livre *Des mois et des jours embolismiques*, c'est-à-dire *intercalaires*, il ajoutait : « Suivant Methon et Euctémon, l'année est de $365^j\frac{1}{4}$ moins $\frac{1}{76}$; suivant Calippe, elle est de $365^j\frac{1}{4}$. Pour nous, nous trouvons en 19 ans le même nombre de jours qu'il ont trouvé, mais une fraction un peu différente, qui est $\frac{1}{4}$ moins $\frac{1}{300}$. » Cette année est trop forte de $6^m\frac{1}{3}$.

Il est à remarquer que, 285 ans plus tard, Ptolémée, qui avait l'avantage de partir d'observations plus nombreuses, retrouvait

cependant la même valeur, ce qui corrobore l'opinion qu'Hipparque lui servait en tout de guide.

Les anciens n'admettaient pour les astres que les mouvements circulaires et uniformes : avant Hipparque, on se figurait le Soleil et la Lune tournant uniformément autour de la Terre dans des cercles dont elle occupait le centre. Les inégalités qu'il remarqua le premier dans les mouvements en longitude de ces deux astres démontrèrent l'erreur de l'opinion commune; Hipparque, pour ne s'écarter que le moins possible de cette opinion, supposa que les deux astres décrivaient autour de la Terre, d'un mouvement toujours uniforme, des orbes circulaires excentriques, c'est-à-dire ayant leurs centres ailleurs qu'au centre de la Terre.

Cette hypothèse revient géométriquement à une autre moins simple qui a été adoptée par Ptolémée, parce qu'elle avait l'avantage de pouvoir convenir aussi aux planètes; mais rien n'oblige à croire qu'Hipparque ne se soit pas borné à la première, qui convient bien mieux au Soleil et à la Lune, parce que les plans de leurs orbites passent par le centre de la Terre.

Quoi qu'il en soit, il est plus simple, pour rendre compte des dernières recherches d'Hipparque, puisqu'elles se rapportent exclusivement au Soleil et à la Lune, de s'en tenir à l'hypothèse de mouvements circulaires uniformes dans des cercles excentriques à la Terre.

Dans cette hypothèse, la différence des distances apogée et périgée est le double de l'excentricité, c'est-à-dire de la distance du centre de la Terre au centre du cercle excentrique décrit par l'astre.

Voici comment Hipparque déterminait à la fois l'excentricité et la ligne des apsides de l'orbite du Soleil.

Dans l'hypothèse du mouvement uniforme du Soleil, la durée totale de la révolution étant d'ailleurs connue, $365^j \frac{1}{4} - \frac{1}{300}$, les durées des quatre saisons, également connues, déterminaient les arcs compris entre les solstices et les équinoxes, par conséquent les cordes de ces arcs, c'est-à-dire le quadrilatère inscrit à l'excentrique, ayant pour diagonales rectangulaires la ligne des solstices et la ligne des équinoxes. On pouvait donc déterminer le centre du cercle, l'excentricité et l'inclinaison de la ligne des apsides sur la ligne des solstices.

Mais voici une autre méthode plus simple qu'Hipparque paraît plutôt avoir suivie; nous disons plus simple, parce qu'elle exige moins de calculs; mais elle suppose des observations plus minutieuses et plus soignées.

En supposant toujours au Soleil un mouvement uniforme dans un cercle excentrique à la Terre, le périgée et l'apogée doivent être les points où l'arc diurne parcouru par le Soleil atteint sa plus grande et sa plus petite valeur, et les distances périgée et apogée doivent être en raison inverse de ces arcs; or l'arc parcouru d'un midi à l'autre par le Soleil varie entre $3670'',1$ et $3431'',5$; les distances périgée et apogée doivent donc être entre elles comme 3431,5 et 3670,1 (bien entendu ce ne sont pas là les nombres trouvés par Hipparque); d'un autre côté l'époque observée du passage du Soleil au périgée faisait connaître l'angle de la ligne des apsides avec la ligne des solstices.

Il trouva l'apogée moins avancé en longitude que le solstice d'été, de $24° 30'$, ce qui était exact de son temps.

On sait que la ligne des apsides de l'orbite apparente du Soleil se déplace lentement, par rapport à la ligne des équinoxes, et que, par suite, les inégalités des durées des saisons varient à la

longue; les nombres donnés par Hipparque ne s'appliqueraient donc plus à notre époque; il trouva pour l'excentricité $\frac{1}{24}$; les observations modernes donneraient $\frac{1}{30}$.

La théorie de la Lune est beaucoup plus difficile que celle du Soleil. Hipparque ne la fit pas complète; il ne reconnut qu'une inégalité dans le mouvement de cet astre, comme dans celui du Soleil. Il détermina, toutefois, avec une grande approximation, la durée de la révolution synodique, qu'il faisait de 29 jours 12 heures 44 minutes 3 secondes et 20 tierces, ainsi que celles de la révolution anomalistique et de la révolution de la ligne des nœuds, enfin l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique.

Nous avons rapporté les belles recherches d'Aristarque de Samos en vue d'obtenir le rapport des distances du Soleil et de la Lune à la Terre et celles d'Ératosthène pour la détermination en stades de la longueur du rayon de la Terre.

Hipparque tenta aussi de résoudre la grande question des distances qui nous séparent des principaux astres, et il le fit par des méthodes bien supérieures à celle d'Aristarque. Malheureusement nous ne savons que très peu de chose de la façon dont il appliqua ces méthodes.

Le diamètre apparent de la Lune éprouvant des variations sensibles dans l'intervalle d'une même journée, bien qu'on dût admettre que sa distance au centre de la Terre ne changeait pas dans cet intervalle, Hipparque en conclut que la distance de la Lune à l'observateur variait d'une manière appréciable dans le cours d'une journée, et que par conséquent le rayon de la Terre n'était pas négligeable devant la distance de la Lune à la Terre. Il tenta par ces considérations de déterminer le rapport des deux

longueurs ainsi que la parallaxe horizontale de la Lune, et l'on doit admettre qu'il avait les moyens théoriques de résoudre la question qui, au reste, ne présente pas de difficultés; mais les observations ne pouvaient pas alors être faites avec un degré d'approximation suffisant pour donner de bons résultats.

Il essaya aussi, pour atteindre ce même but, de se servir des différences constatées dans les durées d'une même éclipse de Soleil, observée de deux points différents de la surface de la Terre. Mais la parallaxe de la Lune ne causait pas seule la différence; celle du Soleil y entrait aussi pour quelque chose, et, en supposant cette dernière de trois minutes comme l'avait fait Aristarque de Samos, Hipparque introduisait une grande cause d'erreur dans les calculs.

Quoi qu'il en soit, il assigna à la parallaxe horizontale de la Lune la valeur de 57′ qui, par hasard, ne s'écarte pas trop de la valeur vraie.

Il ne put qu'ébaucher les théories des planètes connues de son temps. « Il fit voir, dit Ptolémée, que chaque planète a deux inégalités qui sont différentes pour chacune d'elles; que les rétrogradations sont aussi fort différentes; que les mouvements de ces astres ne peuvent s'expliquer par des excentriques ni par des épicycles portés sur des homocentriques. Il en conclut que, sans doute, il faut réunir les deux hypothèses. »

Il avait du moins déterminé avec une grande approximation les durées des révolutions synodiques des cinq planètes connues alors. « Ptolémée nous les a transmises, et elles sont, dit M. Biot, d'une exactitude surprenante. On n'avait guère mieux du temps de Kepler; et, aujourd'hui même, on ne trouve que très peu de chose à y changer. »

Hipparque avait laissé un ouvrage dont nous n'avons pas encore parlé, qui ne nous est pas parvenu, mais dont quelques passages sont cités par Strabon : c'est une critique de la géographie d'Ératosthène dont il avait essayé de corriger l'estimation du méridien terrestre.

Dans son livre *Des mois et des jours embolismiques* il proposait une période de 304 ans, plus parfaite que celle de Calippe, mais que les Grecs n'adoptèrent pas. Calippe retranchait un jour au quatrième cycle de 19 ans de Méthon, et Hipparque en retranchait un nouveau au bout de la quatrième période de 76 ans de Calippe.

Nous rapporterons, en terminant, le jugement que Delambre a porté sur Hipparque : « Quand on réunit tout ce qu'il a inventé ou perfectionné, et qu'on songe au nombre de ses ouvrages, à la quantité de calculs qu'ils supposent, on trouve dans Hipparque un des hommes les plus étonnants de l'antiquité et le plus grand de tous dans les sciences qui ne sont pas purement spéculatives. »

POSSIDONIUS.

[Né à Apamée (Syrie) vers — 135, mort en — 49.]

Philosophe stoïcien. Il alla s'instruire à Athènes et s'établit à Rhodes où il fonda une école.

Il chercha à déterminer les rapports des diamètres du Soleil, de la Lune et de la Terre; mais la question des distances des astres, ou de leurs diamètres, devait nécessairement rester inabordable aux anciens astronomes. Il entreprit aussi de reprendre la déter-

mination en stades du rayon de la Terre, mais il n'arriva à rien de mieux que ce qu'avait obtenu Ératosthène. On lui attribue, comme à Cléomède, la connaissance des effets de la réfraction atmosphérique sur la position apparente des astres. Il paraît aussi avoir remarqué une certaine concordance entre les mouvements de la Lune et les marées.

Il visita deux fois Rome et s'y lia avec Cicéron qui l'appelle son maître et son ami : « *Familiaris noster, a quo instituti fuimus.* » Il reçut à Rhodes la visite de Pompée.

« Pompée, dit Cicéron, m'a souvent raconté qu'à son retour en Syrie, passant par Rhodes, où était Possidonius, il eut le dessein d'aller entendre un philosophe de cette réputation ; et qu'ayant appris que la goutte le retenait chez lui, il voulut au moins lui rendre visite, etc. »

Tous les ouvrages de Possidonius sont perdus, on en a recueilli les fragments épars dans différents auteurs, sous le titre : *Possidonii Rhodii reliquæ doctrinæ* (Leyde, 1810). Ces ouvrages avaient pour titres : — *De cœlestibus ;* — *De sublimibus ;* — *De terrestribus et geographicis ;* — *De Astrologia universa.*

NICOMÈDE.

(Né vers — 100.)

Inventeur de la conchoïde qui porte son nom et qu'il employait à la construction des deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs données.

GÉMINUS.

(Né à Rhodes vers — 95, mort probablement à Rome.)

On a de lui une *Introduction à l'étude des phénomènes célestes*, publiée à Altorf en 1490, avec une traduction latine. C'est un traité élémentaire de Cosmographie, très simple et très clair, mais arriéré. Géminus, en effet, n'ayant pas su profiter des découvertes d'Hipparque, reproduit des erreurs corrigées par ce grand homme; aussi Montucla suppose-t-il qu'il lui était antérieur; mais Géminus cite Hipparque en un endroit, et ses fautes prouvent seulement qu'il ne l'avait pas compris.

Géminus avait laissé un autre ouvrage, intitulé : *Enarrationes Geometricæ*, qui ne nous est pas parvenu, mais dont on peut se faire une idée par les commentaires de Proclus. C'était une sorte d'aperçu historique des découvertes faites avant lui en Géométrie.

VITRUVE (MARCUS POLLIO).

(Né en — 85, mort en — 26.)

Il servit en Gaule sous César, pour qui il construisait les machines de guerre; il est surtout connu par son *Traité d'architecture* en dix livres, dont les trois derniers, consacrés à l'Hydraulique, à la Gnomonique et à la Mécanique appliquée, ont une certaine importance scientifique au point de vue de l'histoire.

Le premier exemplaire manuscrit du *Traité d'architecture* de Vitruve a été découvert dans la bibliothèque du Mont-Cassin; il a été imprimé pour la première fois à Venise en 1497. Une des

meilleures éditions est celle de Schneider (Leipsig, 1808); M. Mautras en a donné, en 1847, une traduction en français, insérée dans la collection Panckoucke.

Vitruve a décrit les divers cadrans solaires connus de son temps et employés à la décoration des édifices ou des jardins. Le plus ancien, qu'il attribue à Bérose, le Chaldéen, est appelé *hémicycle,* et l'on pense. car Vitruve ne s'explique pas très clairement, que le tableau était l'intérieur de la cavité d'un demi-cylindre. Montucla pensait que l'axe de ce cylindre devait être dirigé parallèlement à la ligne des pôles, de sorte que, la pointe du style étant sur l'axe du cylindre, l'ombre de cette pointe aurait tracé chaque jour une circonférence dans l'intérieur du cylindre, et les divisions de cette circonférence, correspondant aux heures, en auraient été égales. Mais Delambre n'admet pas cette hypothèse, et sa raison, qui me paraît en effet excellente, est que ni Ptolémée ni même les Arabes n'eurent l'idée, pourtant si simple, de faire intervenir en quoi que ce soit la ligne des pôles dans la disposition de leurs cadrans.

Vitruve attribue à Aristarque de Samos l'invention du *scaphé* et à Eudoxe celle de l'*arachné;* nous avons admis cette tradition, adoptée par Montucla, malgré le doute qu'élève Delambre à son sujet, parce que, en ce qui concerne Aristarque de Samos, dont le cadran est très facile à construire, Delambre n'objecte que le silence gardé sur le fait par tous les anciens, excepté Vitruve; et en ce qui concerne Eudoxe, parce que la difficulté de construire l'arachné sans recourir à la Trigonométrie, difficulté qui semble déterminer le jugement de Delambre, ne peut constituer un motif suffisant. En effet, on ne prétend pas qu'Eudoxe ait construit son cadran horizontal avec l'exactitude que pouvaient y apporter

Ptolémée et les Arabes; d'ailleurs, si l'inventeur de ce cadran bien ou mal construit n'était pas Eudoxe, en tout cas il serait antérieur à Vitruve, et par conséquent à Ptolémée, en sorte qu'il faudrait bien passer sur la difficulté.

Vitruve nomme encore le *disque*, qu'il attribue aussi à Aristarque de Samos; le *plinthe* de Scopas de Syracuse et le *pros-ta-istoroumena* de Parménion; nous ne connaissons pas autrement ces deux géomètres; le *pros-pan-clima* de Théodose, le *cône* de Dionysidore et le *carquois* d'Apollonius; enfin le *gonarché*, l'*engoniaton* et l'*antiboreum*, dont il ne nomme pas les inventeurs.

Malheureusement Vitruve décrit si peu tous ces cadrans qu'on ne saurait s'en faire d'idée que par conjecture.

CLÉOMÈDE.

(Né vers — 80.)

On n'a de lui qu'un ouvrage, intitulé : *Théorie circulaire des météores*, imprimé en dernier lieu à Leyde, en 1820, par Backe, avec une traduction latine et des commentaires de Balfour.

Il y affirme la sphéricité de la Terre, connue depuis bien longtemps, rapporte le phénomène des marées au mouvement de la Lune, et enseigne que nous voyons les astres un peu avant leur lever réel, et, ensuite, plus élevés au-dessus de l'horizon qu'ils ne le sont en réalité.

On conçoit que les anciens aient pu connaître le phénomène de la réfraction atmosphérique sans en avoir aucune explication. En effet, ils pouvaient aisément reconnaître, par exemple, que

le Soleil, le jour de l'équinoxe, reste un peu plus longtemps au-dessus de l'horizon qu'au-dessous.

SOSIGÈNE.

(Né vers — 80.)

Tout ce qu'on sait de sa vie, c'est qu'il se rendit à Rome, à l'appel de Jules César, pour l'aider dans la réforme du calendrier.

L'année instituée par Numa était principalement réglée sur le mouvement de la Lune et ne comprenait que 355 jours. Elle était divisée en 12 mois, dont les durées étaient :

Janvier......	29	jours.
Février......	28	»
Mars........	31	»
Avril........	29	»
Mai..........	31	»
Juin........	29	»
Quintilis....	31	»
Sextilis......	29	»
Septembre...	29	»
Octobre.....	31	»
Novembre...	29	»
Décembre ...	29	»

On avait, un peu plus tard, imaginé d'intercaler, tous les deux ans, entre le 23e et le 24e jour de février, un mois de 22 jours, pour ramener l'accord entre l'année civile et l'année tropique.

Mais cette intercalation donnait à l'année une durée trop longue; d'ailleurs, les pontifes chargés de l'ordonnancer faisaient depuis longtemps commerce de leurs arrêtés, en sorte que du temps de Jules César le calendrier était tombé dans un désordre extrême.

D'après l'avis de Sosigène, l'année fut supposée être de $365^j \frac{1}{4}$, quoique l'astronome grec sût fort bien qu'Hipparque l'avait trouvée moindre de 4^m et 48^s. Il fut décidé que trois années consécutives seraient de 365 jours, et la quatrième de 366, le jour supplémentaire devant être intercalé entre le 23e et le 24e jour du mois de février. Le 24e s'appelait *sexto-calendas;* on donna au jour intercalaire le nom de *bis-sexto calendas*.

Les durées des mois furent alors réglées de la manière suivante :

Janvier.....	31 jours.
Février.....	28 ou 29 jours.
Mars.......	31 jours.
Avril.......	30 »
Mai........	31 »
Juin........	30 »
Quintilis....	31 »
Sextilis.....	31 »
Septembre...	30 »
Octobre.....	31 »
Novembre...	30 »
Décembre...	31 »

Les mois appelés *quintilis* et *sextilis* ne prirent que plus tard les noms de juillet et août, en l'honneur de Jules César et d'Auguste.

Le nouveau calendrier fut mis en usage en l'année — 44. L'année précédente fut étendue jusqu'à 445 jours; elle est connue sous le nom d'*année de confusion.*

Sosigène avait composé des commentaires, aujourd'hui perdus, sur le traité d'Aristote *De cœlo*, et un traité *De revolutionibus*, qui paraît avoir eu pour objet la discussion de la durée de l'année.

DIONYSIDORE.

(Né à Émèse, suivant Montucla, ou à Mélos, suivant Delambre, vers — 20.)

Eutocius lui attribue la solution, par l'intersection de deux coniques, du problème d'Archimède, de diviser un hémisphère en raison donnée par un plan parallèle à la base. Cependant, d'après Pline, qui peut-être l'a maladroitement interprété, il n'aurait pas connu le rapport approché de la circonférence au diamètre, déterminé par Archimède, et aurait fait la circonférence de la Terre égale à six fois le rayon.

Nous tombons dans une période où il se rencontre plus d'écrivains que de savants.

MANILIUS (ANTIOCHUS OU MARCUS).

(Affranchi originaire de Syrie, contemporain d'Auguste.)

Il est l'auteur d'un poème latin, en cinq livres, intitulé : *Astronomicon*, remarquable à plusieurs titres et qui a été imprimé un grand nombre de fois ; la dernière, par Pingré, avec la traduction française.

L'auteur de l'*Astronomicon* est probablement le Manilius qui dressa dans le champ de Mars, par ordre d'Auguste, l'obélisque de 70 pieds de hauteur, destiné à servir de gnomon.

SÉRÉNUS.

(Né à Antis en l'an 10.)

A écrit deux livres, l'un sur les sections cylindriques, l'autre sur les sections coniques. Pour en rendre compte, nous ne croyons mieux faire que de lui laisser la parole, en traduisant les lettres d'envoi de ces deux livres à son ami Cyrus, d'après la traduction latine de Halley.

LIVRE I.

« Comme je voyais, mon cher Cyrus, que beaucoup de géomètres pensaient que la section plane d'un cylindre diffère de la section du cône que l'on nomme ellipse, j'ai cru bien faire de les tirer de leur erreur, ainsi que ceux à qui ils auraient persuadé que la chose est ainsi; parce qu'il est de tout point absurde que des géomètres affirment quoi que ce soit, sans démonstration, sur un problème de Géométrie, ce qui est le plus opposé à l'esprit géométrique.

« C'est pourquoi, eux pensant d'une façon et nous étant d'un avis contraire, qu'il nous soit permis de démontrer géométriquement que les sections faites dans le cylindre et dans le cône sont nécessairement de même espèce, pourvu que les deux surfaces soient coupées convenablement et non au hasard.

« Mais, comme les anciens géomètres qui ont traité des sec-

tions coniques ne se sont pas contentés de considérer le cône engendré par la révolution d'un triangle rectangle, mais aussi le cône scalène, de même il faudra considérer les sections du cylindre oblique, etc. »

LIVRE II.

« Très illustre Cyrus, comme les sections triangulaires d'un cône par les plans menés par son sommet appellent une contemplation aussi variée que superbe, et que ceux qui m'ont précédé ne s'en sont pas occupés, j'ai pensé que je ne ferais pas mal de ne pas laisser ce point inexpliqué, mais, au contraire, d'écrire ce que j'en avais aperçu, etc. »

Quoique l'on puisse bien dire qu'il faut avoir une forte envie de faire des mathématiques pour traiter un pareil sujet, néanmoins Sérénus ne laisse pas que d'en tirer quelques observations intéressantes en comparant entre eux tous les triangles de section, déterminant ceux dont la surface est maximum ou minimum, les conditions de leur équivalence, etc.

Il démontre aussi, par occasion, des propositions qui seront utilisées par les arithméticiens.

Exemple : *Proposition XVIII.* — Si quatre droites sont telles que la raison de la première à la deuxième soit plus grande que la raison de la troisième à la quatrième, la raison du carré fait sur la première au carré fait sur la seconde sera aussi plus grande que la raison du carré fait sur la troisième au carré fait sur la quatrième.

PLINE (CAIUS PLINIUS SECUNDUS).

(Né à Côme en 23, mort près de Naples en 79.)

Il vint à Rome sous Tibère et y suivit les leçons d'Apion, qui enseignait les lettres, l'histoire et les éléments de quelques sciences, notamment de l'Histoire naturelle.

On le voit à vingt-six ans commandant d'une aile de cavalerie, sous Pomponius Secundus, son parent, dans une expédition en Germanie, d'où il rapporta une œuvre estimée de ses contemporains et intitulée *Histoire des guerres de la Germanie,* mais dont il ne subsiste que des fragments cités dans d'autres ouvrages.

A son retour à Rome, il se fit avocat; publia, quelque temps après, un *Traité des équivoques du langage*, puis une *Histoire de son temps*, enfin son *Histoire naturelle* qu'il dédia à Titus, déjà associé à l'Empire par son père Vespasien.

Cet ouvrage n'est qu'une vaste compilation extraite, sans beaucoup de méthode et avec moins de discernement encore, de plus de deux mille volumes, dit-on, que l'auteur avait rassemblés.

Pline avait certainement cru faire un ouvrage scientifique; ses contemporains le lurent à ce titre, et tout le moyen âge l'étudia avec avidité, depuis les Pères de l'Église jusqu'aux Arabes, qui le traduisirent dans leur langue.

Il n'en reste aujourd'hui que ce à quoi Pline sans doute attribuait le moins d'importance : quelques documents sur les conditions de la vie sociale dans le monde romain ; des notions malheureusement très sommaires sur les procédés employés dans les arts industriels; enfin quelques renseignements relatifs à l'Histoire et à la Géographie.

« Le plan de cet ouvrage, dit Cuvier, est immense. Pline ne se propose point d'écrire une histoire naturelle dans le sens où nous prenons aujourd'hui ces mots, c'est-à-dire un traité plus ou moins détaillé des animaux, des plantes et des minéraux; il embrasse l'Astronomie, la Physique, la Géographie, l'Agriculture, le Commerce, la Médecine et les Arts aussi bien que l'Histoire naturelle.

« Le premier livre est une table des matières et des noms des auteurs, ses garants. Le deuxième traite du monde, des éléments, des astres et des principaux météores. Les quatre suivants forment une géographie. Le septième traite des différentes races d'hommes.... Quatre livres sont ensuite consacrés aux animaux terrestres, aux poissons, aux oiseaux et aux insectes. Mais les espèces sont classées par la grandeur.... Dix livres sont employés à faire connaître les plantes, leur culture et leurs emplois. Dix autres traitent des remèdes; enfin, dans les cinq derniers, Pline décrit les minéraux et leurs usages.

« Malheureusement le vrai et le faux se trouvent partout mêlés en quantités presque égales.

« Pline n'est en général qu'un compilateur qui, n'ayant point par lui-même l'idée des choses sur lesquelles il rassemble les témoignages des autres, n'a pu apprécier la vérité de ces témoignages, ni même toujours comprendre ce qu'ils avaient voulu dire. C'est, en un mot, un auteur sans critique....

« En général, il s'attache aux choses singulières et merveilleuses... et les contes les plus puérils ne sont pas ceux qui provoquent le plus son incrédulité. »

Pline se trouvait au cap Misène, où il commandait une flottille romaine chargée de la surveillance des pirates africains, au moment de l'éruption du Vésuve qui détruisit Pompeï, Herculanum,

Stabies et d'autres villes. Il fit appareiller quelques galères et se porta du côté de Stabies, en partie pour observer de plus près l'éruption, en partie pour porter secours au besoin. Il passa la fin de la journée et une partie de la nuit chez un de ses amis, y soupa gaiement et y dormit même quelques heures; mais la position n'était plus tenable : ses hôtes l'éveillèrent pour l'inviter à fuir avec eux; il se dirigea vers le port, mais la fatigue l'obligea à se coucher sur le sol et il mourut asphyxié par des gaz échappés d'une crevasse qui se forma près du lieu où il s'était reposé.

THÉODOSE.

(Né en Bithynie vers 40, mort vers 100.)

Il reste de lui trois ouvrages : *Sphericæ*, *De habitationibus* et *De diebus et noctibus*. Le premier est divisé en trois livres et a pour objet l'établissement des principes géométriques de l'Astronomie. Le troisième livre contient des propositions difficiles que Pappus a commentées.

Les traités *De habitationibus* et *De diebus et noctibus* roulent sur la diversité des mêmes phénomènes célestes observés des divers points de la surface de la Terre et sur les variations du jour et de la nuit aux différentes époques de l'année.

Les *Sphericæ* ont été publiées pour la dernière fois en 1709, à Oxford, par Jean Hunt. Les deux autres ouvrages de Théodose ont été traduits et publiés en 1587 par Jean Auria.

NICOMAQUE.

(Né vers 50.)

Appartenait à l'école de Pythagore. Plusieurs de ses ouvrages ne nous sont pas parvenus, mais il nous reste une *Introduction à l'étude de l'Arithmétique*, publiée par Wechel (Paris, 1534) et un *Manuel d'Harmonie*.

MÉNÉLAÜS.

(De l'école d'Alexandrie, vivait vers l'an 80.)

Il avait composé sur le calcul des cordes six livres qui sont perdus; il reste de lui un ouvrage en trois livres intitulé *les Sphériques*, qui est consacré aux deux Trigonométries. On trouve, pour la première fois, dans cet ouvrage le théorème qui servait de base à la Trigonométrie sphérique, probablement reproduit d'après Hipparque, et diverses propositions curieuses, notamment celle-ci : Si l'on mène l'arc de grand cercle bissecteur de l'un des angles d'un triangle sphérique, les cordes des segments qu'il détermine sur le côté opposé sont entre elles comme les cordes des côtés adjacents.

Le texte grec des *Sphériques* n'existe plus, mais on en possède des versions latines d'après des traductions arabes et hébraïques. Nous citerons particulièrement celle de Halley, publiée après sa mort, en 1758, à Oxford.

THÉON DE SMYRNE.

(Né vers 120, mort vers 180.)

Il appartenait à l'école pythagoricienne et, d'après Ptolémée, fit des observations sur Mercure et Vénus. Il reste de lui une *Arithmétique* publiée par Boulliau en 1647 avec une traduction latine et des notes, et une *Astronomie* publiée par H. Martin en 1849.

L'*Arithmétique* est pompeusement intitulée *Mathematica;* elle est divisée en deux parties, dont la seconde ne contient guère que des divagations sur la musique et sur les qualités des nombres. On y remarque cependant les éléments d'une idée des relations entre les longueurs d'une corde et les notes de la gamme qu'elle rend lorsqu'on la fait vibrer. On y trouve aussi des phrases sur les proportions arithmétiques, géométriques et harmoniques.

La première partie est surtout importante à connaître, parce que, les Pythagoriciens ayant très peu écrit et le peu d'ouvrages qu'ils avaient laissés ne nous étant même parvenus que par fragments, celui de Théon est à peu près le seul par lequel nous puissions juger des doctrines qui avaient cours dans l'école fondée par Pythagore et qui se répandirent ensuite parmi les disciples de Platon.

Cet ouvrage de Théon est du reste plus curieux, au point de vue de l'histoire des idées, par le côté négatif et pour ce qu'il renferme de mauvais que pour le peu de bonnes choses qui s'y trouvent mêlées à des chimères musico-astronomico-géométriques.

Mais constatons avant tout que les géomètres grecs faisaien si peu de cas de toutes les recherches arithmétiques des Pythagoriciens, qu'ils ne daignèrent même pas les apercevoir. Pas un

géomètre n'y fait une simple allusion. Les arithméticiens voudraient bien paraître géomètres, et ils font pour cela de grands efforts, jusqu'à employer avec affectation et hors de tout propos, dans leurs traités, les expressions usitées en Géométrie; mais les géomètres les laissent tous, avec un ensemble parfait, dans un complet isolement.

Cela se comprend à merveille lorsque l'on compare les admirables découvertes d'Archimède, d'Apollonius et de leurs dignes précurseurs aux pauvretés rapportées par Théon.

L'ouvrage débute naturellement par un discours sur l'utilité des Mathématiques; il y est question de la peste, de l'oracle qui ordonnait, pour la faire évanouir, de doubler l'autel d'Apollon, de l'intérêt qu'avait le dieu à ce qu'on ne négligeât pas l'étude des Mathématiques, de la Musique, de la Géométrie, des choses qui concernent les dimensions des solides, et de l'Astronomie qui oblige à diriger les yeux vers le ciel. Il y est aussi question de Palamède, qui apprit aux Grecs à dénombrer leurs vaisseaux devant Troie, d'Agamemnon qui ignorait les noms des nombres, jusqu'à ne pas savoir qu'il avait deux pieds.

On y voit que la Logistique et l'Arithmétique portent à la contemplation de la vérité, et à la recherche du bon et du beau; que celui-là est un animal (ζῶον) qui ne sait si *deux* ou *trois* sont pairs ou impairs; que le philosophe seul peut être musicien; que celui qui ignore la Musique est vicieux et malhonnête, etc. Il y en a comme cela 23 pages.

Chapitre II. *Sur l'Arithmétique.* — On ne pourrait comprendre l'harmonie qui est dans le monde et dans la Musique, si on n'avait d'abord étudié les propriétés des nombres. L'Arithmétique est la première des sciences; ensuite vient la Géométrie, puis la Stéréo-

métrie, ensuite l'Astronomie et enfin la Musique. Les nombres, comme l'enseignait Pythagore, sont le principe, la source et la raison de toutes choses.

Chapitre III. *Du nombre* un *et de l'unité.* — L'unité est indivisible; en effet, les parties qui composent un tout sont toujours plus petites que le tout; or, si l'on divisait l'unité en plusieurs nombres, ces nombres n'étant pas l'unité seraient plus grands que l'unité, etc. ; donc l'unité est indivisible.

On l'appelle monade, soit parce qu'elle reste immuable et ne peut pas sortir des bornes de sa nature, car multipliée par elle-même elle se reproduit toujours et ne donne jamais que l'unité; soit parce qu'elle est séparée et posée seule à la tête de la multitude des nombres.

Du reste, il faut distinguer l'unité du nombre *un;* l'unité est corporelle et le nombre *un* est intellectuel.

Chapitre IV. *Du principe des nombres.* — Théon reprend Pythagore, Archytas et Philolaüs pour n'avoir pas distingué entre l'unité et le nombre *un;* entre les nombres d'objets et les nombres eux-mêmes. Six bœufs forment un nombre sensible, six est un nombre intellectuel.

Chapitre V. *Des nombres pairs et des nombres impairs.* — *Un* est-il pair ou est-il impair, car il faut bien qu'il soit l'un ou l'autre, d'autant que pair est le contraire d'impair. Or il n'est pas pair, puisqu'il est indivisible; donc il est impair.

Pythagore faisait commencer à *trois* la série des nombres impairs; Aristote prétendait que l'unité est aussi bien paire qu'impaire, et Archytas partageait cet avis, mais ils se trompaient; en effet, *deux* est bien pair et *trois* parfaitement impair; or *un* ajouté à *deux* donne *trois;* donc *un* est impair; car il faut

ajouter un nombre impair à un nombre pair pour trouver un nombre impair.

Chapitre VI. *Des nombres premiers et indécomposables.* — Les nombres premiers ne sont mesurables que par l'unité; ils ont la longueur, mais pas de largeur. Ils ont cinq noms différents : on les appelle premiers, indécomposables ou non composés, linéaires, euthymétriques, et impairement impairs.

Les nombres pairs ne sont pas premiers, excepté le nombre 2, qui participe de la nature des nombres impairs.

Les nombres premiers entre eux sont ceux qui n'ont pas d'autre commune mesure que l'unité.

Chapitre VII. *Des nombres composés.* — Les nombres composés sont ceux que mesure un autre nombre. On les appelle *plans,* quand ils ont longueur et largeur, comme 6, qui a pour longueur 3 et pour largeur 2; ils sont *solides,* quand ils sont contenus sous trois dimensions. *Trente* est un nombre solide ($30 = 2 \times 3 \times 5$).

Chapitre VIII. *Des différents nombres pairs et principalement des nombres pairement pairs.* — Les nombres pairement pairs sont ceux qui ne sont décomposables qu'en parties paires : tels sont 32, 64, 128, ...

Chapitre IX. *Des nombres pairement impairs.* — Ce sont les nombres qui, divisés par 2, donnent un quotient impair.

Chapitre X. *Des nombres impairement pairs.* — Ce sont ceux qui peuvent être divisés deux fois de suite par 2. 14 est pairement impair et 20 est impairement pair.

Chapitre XI. *Des nombres æqualiter æqualibus.* — Ce sont les nombres composés qui ont la longueur égale à la largeur. Ils sont carrés et plans; tels sont 4 et 9.

Chapitre XII. *Des nombres inæqualiter inæqualibus.* — Ce

sont ceux qui proviennent de la multiplication de nombres inégaux. 6 est *inæqualiter inæqualis*.

Chapitre XIII. *Des nombres altera parte longioribus.* — Ce sont ceux dont l'un des côtés surpasse l'autre d'une unité. Tel est 12, dont la longueur 4 surpasse la largeur 3 d'une unité. Les nombres *altera parte longiores* sont pairs. Car, dit Théon, si la largeur est paire, le nombre est pair, et si elle est impaire, alors c'est la longueur qui l'est, car, etc. On peut obtenir de deux manières les nombres *altera parte longiores*, soit en multipliant entre eux deux nombres consécutifs (d'après la définition); soit par addition, de la manière suivante : on prend la suite des nombres pairs

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots,$$

et on les ajoute à partir du commencement comme suit : 2 et 4 font 6, 6 et 6 font 12, 12 et 8 font 20, 20 et 10 font 30, 30 et 12 font 42, etc.; les sommes obtenues sont des nombres *altera parte longiores*.

En effet, la somme des n premiers nombres pairs est

$$2(1+2+\ldots+n) = n(n+1).$$

Mais Théon ne donne pas la démonstration.

Chapitre XIV. *Des nombres parallélogrammes.* — Ce sont ceux dont la longueur surpasse la largeur de deux unités *ou davantage*. (Je crois que *ou davantage* est de trop.)

Chapitre XV. *Des nombres carrés.* — On peut les obtenir par l'addition de la série des nombres impairs. Ainsi :

$$1+3=4, \quad 4+5=9, \quad 9+7=16, \ldots.$$

En effet,

$$1 + (2.1 + 1) + (2.2 + 1) + \ldots + (2.n + 1)$$
$$= n + 1 + n(n + 1) = (n + 1)^2.$$

Mais Théon ne donne pas la démonstration.

CHAPITRE XVI. *Les nombres carrés (consécutifs) admettent pour moyennes proportionnelles des nombres* altera parte longiores, *mais non pas réciproquement.*

Exemple : 16 et 25; la moyenne proportionnelle est 20, qui est *altera parte longior*, puisqu'il est le produit de 4 par 5.

CHAPITRE XVII. *Des nombres oblongs.* — Ce seraient ceux qu'il a déjà appelés parallélogrammes; mais je crois qu'il y a erreur, et que les nombres oblongs sont les produits de deux nombres différant au moins de trois unités.

CHAPITRE XVIII. *Des nombres plans.* — Ce sont les produits de deux nombres, l'un en longueur et l'autre en largeur. Les uns sont triangulaires, les autres quadrangulaires, pentagonaux, hexagonaux, et l'on va voir pourquoi et comment.

Mais il ne règne pas beaucoup d'ordre dans les propositions suivantes, et, pour abréger, nous allons en prendre quelques-unes en bloc, sauf à revenir sur celles qui, intercalées, n'avaient pas un rapport direct à la question.

CHAPITRES XIX, XX, XXIII, XXV, XXVI, XXVII. *Des nombres polygonaux en général.* — Théon a déjà remarqué que les sommes des nombres impairs, à partir de 1, forment les carrés de tous les nombres, et que les sommes des nombres pairs, à partir de 2, forment les produits de deux nombres consécutifs, *altera parte longiores.*

Mais ce qui concerne ces derniers constitue une remarque

dont, sans doute, on savait l'inanité, sans vouloir consentir à en perdre le bénéfice. On a conservé la remarque, mais on n'en fera plus usage. Le jalon subsistera, mais il ne servira à rien qu'à multiplier les dénominations, ce qui, sans être un but, était peut-être, dans les écoles du temps, un moyen pédagogique.

On aurait bien pu, sans doute, introduire la considération inutile des produits de facteurs qui diffèrent de 2 unités (je crois bien que ce sont les nombres parallélogrammes, et que le texte primitif aura été altéré dans le Chapitre XIV ; car, pourquoi les nombres oblongs viendraient-ils doubler les nombres parallélogrammes, s'ils n'en diffèrent pas?), de 3 unités, de 4, de 5, etc., unités ; mais on n'aura sans doute rien trouvé d'*intéressant* à dire sur ces produits.

Quant à la théorie des nombres polygonaux, elle procède d'aperçus originaux où l'on conçoit que les esprits contemplatifs que l'école pythagoricienne se plaisait à former, aient pu se confiner jusqu'à atrophie parfaite.

Un nombre de p angles est la somme d'une suite des nombres naturels, à partir de 1, qui diffèrent les uns des autres de $p-2$ unités.

La formule générale d'un nombre de p angles, formule que Théon, bien entendu, ne connaissait pas, est donc

$$1+(1+p-2)+[1+2(p-2)]+\ldots+[1+n(p-2)],$$

ou

$$\tfrac{1}{2}(n+1)[2+n(p-2)].$$

Ces nombres n'ont, comme on voit, rien de bien remarquable, quoiqu'ils donnent les carrés, en supposant $p=4$.

Mais la construction géométrique (qui, sans doute, tenait

lieu de la formule) en est assez frappante pour avoir pu attacher outre mesure des esprits tournés d'avance à la méditation contemplative du faquir.

Que l'on prenne un point pour sommet d'un polygone régulier de p côtés, et que l'on marque 1 à ce point; que l'on mène du point choisi deux droites faisant entre elles l'un des angles intérieurs d'un polygone régulier de p côtés; que l'on marque sur chacun de ces côtés un point, à la distance que l'on voudra du sommet choisi; que l'on achève le polygone régulier de p côtés et qu'on marque encore 1 à chaque sommet; que l'on prolonge de longueurs égales à elles-mêmes les longueurs des deux premiers côtés du premier polygone; que l'on achève encore le polygone régulier de p côtés, ayant pour premiers côtés les deux que l'on vient de construire; que l'on marque encore 1 à chaque sommet, et qu'on continue toujours de la même manière, en ajoutant toujours la même longueur aux deux premiers côtés de chacun des polygones: le nombre d'unités marquées aux sommets de tous les polygones réguliers précédents et au sommet du dernier polygone construit sera l'un des nombres polygonaux de p angles.

En effet, soit q le nombre des points marqués, au delà du point origine, sur le premier côté du dernier polygone construit, le premier côté du polygone suivant contiendra un point de plus, et chacun des $p - 2$ côtés nouvellement introduits en contiendra q, au delà de son point de départ; on en aura donc ajouté, en tout,

$$1 + q(p - 2).$$

Mais Théon n'a pas à s'embarrasser de cette démonstration,

parce que, ses nombres ne tirant leur définition que de la construction même, il n'a pas de rapprochement à faire entre deux points de vue. Théon n'a pas même l'air de savoir que chacun des nombres polygonaux de p côtés s'obtient en ajoutant $1 + n(p - 2)$ à la somme des précédents.

Parmi les nombres polygonaux, les seuls remarquables sont les nombres triangulaires, qui sont les sommes des premiers nombres naturels, et les nombres quadrangulaires, qui sont, comme le montre la figure, les carrés des nombres naturels. Les autres, au point de vue moderne, ne sont que les sommes des termes de progressions par différence ne présentant aucun intérêt. Quant à la Géométrie qui intervient dans cette affaire, c'est de la Géométrie d'enfants.

Chapitre XXI. *De æqualiter æqualibus* et *de inæqualiter inæqualibus*. — Les nombres carrés sont *æqualiter æquales*, parce qu'ils ont leurs côtés égaux; les autres, s'ils ne sont pas premiers, sont *inæqualiter inæquales*. On les a déjà appelés oblongs ou parallélogrammes.

Chapitre XXII. *Des nombres semblables*. — Ce sont des produits de facteurs proportionnels.

Chapitre XXIV. *Des nombres circulaires et des nombres sphériques*. — 5 est circulaire et sphérique, parce que son carré, son cube, etc., se terminent tous par 5; il en est de même de 6.

Chapitre XXVIII. *La somme de deux nombres triangulaires consécutifs est un carré*. — En effet, deux nombres triangulaires consécutifs sont

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

dont la somme est

$$(n+1)^2.$$

Mais Théon ne le démontre pas.

Chapitre XXIX. *Des nombres solides.* — Ce sont les produits de trois nombres.

Chapitre XXX. *Des nombres pyramidaux.* — Ce sont, dit Théon, ceux qui servent à mesurer les pyramides et les troncs de pyramides. Mais il se borne a la définition, parce que, sans doute, il ne peut en dire davantage.

Chapitre XXXI. *Des nombres latéraux et diagonaux.* — Théon voit dans les nombres des diamètres, des diagonales, etc.; mais nous ne le suivrons pas jusque-là.

Chapitre XXXII. *Des nombres parfaits, abondants et déficients.* — Les nombres parfaits sont ceux qui se reproduisent dans la somme de leurs facteurs; tel est $6 = 1 + 2 + 3$. Les nombres abondants sont ceux qui surpassent la somme de leurs facteurs, et les nombres déficients ceux qui n'atteignent pas la somme de leurs facteurs. Il est étonnant qu'il ne les ait pas appelés paraboliques, hyperboliques et elliptiques. Ce qui eût paru plus Apollonien.

Voilà à quoi se réduit tout le savoir de Théon et des Pythagoriciens. On comprend que les géomètres n'en aient pas été jaloux.

Quant à la *Musique* de Théon, nous n'en dirons rien de plus que les deux mots que nous lui avons déjà accordés; mais il convient de citer au moins quelques exemples des divagations dans lesquelles tombe l'auteur au sujet des qualités des nombres. On verra par ces exemples à quels misérables jeux d'esprit le culte du nombre avait conduit les adeptes de l'école de Pythagore.

Le nombre *deux* est le premier accroissement de l'unité; en lui se considèrent la matière et tout ce qui est sensible, la génération et le mouvement, l'accroissement et la composition, l'association et la relation à quelque chose.

Le nombre *trois* est le premier qui contienne le commencement *un*, la fin *un* et la moyenne *deux*. C'est par *trois* que nous faisons tout; que nous frappons nos traités, notamment.

Ce qui est tout à fait mauvais, nous l'appelons *trois* fois malheureux, et ce qui est bon dans toutes ses parties, *trois* fois heureux. La première origine du plan est tirée du nombre *trois*, car sa première substance est en un triangle. Et même dans les triangles, c'est encore par le nombre *trois* que se distinguent les genres; car un triangle est équilatéral, ou isoscèle, ou scalène; etc.

Le nombre *quatre* est l'image du solide, et c'est le premier carré pair. Toutes les symphonies sont complètes en lui, comme cela est évident.

Le nombre *six* est parfait, parce qu'il est égal à ses parties (c'est-à-dire à la somme de ses facteurs 1, 2, 3). Il est nuptial, car c'est par lui que les enfants ressemblent à leurs parents. Théon omet de dire que c'est évident, sans doute parce que ce l'est trop pour ne pas l'être évidemment.

Mais le nombre *huit* est encore plus remarquable : d'abord, c'est le premier cube; ensuite, il y a *huit* grands dieux, maîtres de tous les autres; enfin, Orphée n'a-t-il pas juré par les *huit* éléments générateurs des immortels : le Feu, l'Eau, la Terre, le Ciel, la Lune, le Soleil, la Lumière brillante et la Nuit noire?

O Archimède!

DIOSCORIDE.

[Né à Anazarbe (Cilicie) vers 120, mort vers 185.]

Il entra fort jeune comme chirurgien-médecin dans les armées romaines, et visita, à la suite des légions auxquelles il fut attaché, l'Égypte, l'Espagne, la Gaule et l'Italie.

Il a laissé un ouvrage considérable sur les minéraux et les végétaux employés dans la pharmacopée de son temps. Cet ouvrage, écrit en grec et qui a été étudié, pendant quinze siècles, par les Arabes d'abord et ensuite par les médecins européens, a été traduit en latin, en 1829, par le docteur Kühn, professeur de Physiologie et de Pathologie à l'Université de Leipsig, sous le titre : *Pedani Dioscoridis Anazarbei de materia medica libri quinque.*

On s'accorde à reconnaître à Dioscoride, à défaut du talent d'écrivain, une grande exactitude dans les descriptions, une soigneuse attention à ne rapporter que ce qu'il a vu et essayé lui-même, enfin une tendance marquée à la recherche exclusive de ce qui peut être utile.

Son ouvrage est encore aujourd'hui consulté par tous les savants qui désirent connaître l'histoire des préparations médicales.

Galien en parlait avec les plus grands éloges; il a été commenté par Oribase et Aétius au IVe et au Ve siècle, par Paul d'Égine au VIIe, par Sérapion au Xe, par un grand nombre de médecins arabes et enfin par Mathiole, médecin italien. Le commentaire de Mathiole a été traduit en latin, en allemand et en français.

Jean-Jacques Rousseau n'herborisait qu'un Dioscoride à la main.

PTOLÉMÉE.

(Né probablement à Ptolémaïs vers l'an 128, mort en 168. Passa la plus grande partie de sa vie à Alexandrie.)

Son grand traité d'Astronomie portait le titre de *Composition* ou *Syntaxe mathématique* (nommé aussi par les Arabes *Almageste*); on y trouve une exposition du système du monde, de l'arrangement des corps célestes et de leurs révolutions, suivant les idées du temps; un traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique, ainsi qu'une description fort complète et fort curieuse de tous les instruments astronomiques employés par les Grecs.

Sa *Géographie*, tant de fois réimprimée, est un monument précieux, malgré des erreurs considérables, parce qu'elle est le dépôt le plus vaste et le plus complet des connaissances acquises de son temps. Ptolémée y suit surtout Marin de Tyr.

On possède encore de Ptolémée un grand nombre d'ouvrages, parmi lesquels on distingue : les *Tables manuelles*, destinées aux astrologues; le *Canon chronologique des rois*, dont l'utilité a été appréciée de tous les érudits qui se sont occupés d'histoire ancienne; les *Hypothèses*, résumé de son grand ouvrage astronomique; l'*Optique*, dont le texte grec est perdu et dont on ne possède qu'une médiocre traduction latine inédite, faite sur une traduction arabe; on y trouve la théorie générale de la vision, celle des miroirs, de la réfraction de la lumière, de la réfraction astronomique, etc. L'édition la plus complète des œuvres de Ptolémée est celle de Bâle (1551).

La mémoire de Ptolémée a éprouvé successivement la louange la plus outrée et le dénigrement le plus injuste. Les contem-

porains ne l'appellent pas autrement qu'*admirable* et *divin*; jusqu'à Copernic, il règne aussi souverainement dans le domaine de l'Astronomie qu'Aristote, jusqu'à Descartes, dans ceux de la Physique et de la Philosophie, et il exerce sur les esprits un empire aussi absolu; mais, comme Aristote, il perd tout à coup tout crédit, et alors son nom est presque voué au ridicule.

Mieux placés pour être impartiaux, nous pouvons aujourd'hui rendre pleine justice à l'un et à l'autre.

Les principaux ouvrages d'Hipparque sont totalement perdus, et nous ne connaissons guère ce grand homme que par la *Syntaxe* de Ptolémée. Il est certainement l'inventeur de la plus grande partie des méthodes d'observation et de calcul développées dans l'*Almageste;* c'est à lui qu'est due la détermination de l'excentricité de l'orbite du Soleil et peut-être de celle de l'orbite de la Lune.

Mais Hipparque avait à peine établi les premières bases de l'histoire des planètes, et tout ce que contiennent les ouvrages de Ptolémée relativement à ces astres peut être considéré comme lui appartenant.

Du reste, Hipparque, dont le génie était incontestablement supérieur, n'aurait probablement pas poussé, comme Ptolémée, jusqu'à la complication la plus invraisemblable les développements d'un système qui, dans l'origine, lorsqu'il ne s'agissait encore que du Soleil et de la Lune, était, en définitive, ce qu'on pouvait imaginer de plus simple et constituait une hypothèse véritablement philosophique.

Ptolémée ne paraît pas avoir souvent observé par lui-même; il s'est probablement servi des données numériques fournies par Hipparque et par ses successeurs immédiats. La plupart même

des calculs dont il donne les tableaux paraissent empruntés aux ouvrages d'Hipparque; la latitude du poste d'observation y est supposée, en effet, celle de Rhodes, où Hipparque a passé ses jours, et non celle d'Alexandrie, où écrivait Ptolémée. Du reste, l'*Almageste*, la plupart du temps, ne dissimule pas plus les emprunts faits à Hipparque qu'il ne ménage les éloges donnés à ce grand homme.

Ptolémée n'a pour ainsi dire rien changé à la théorie du Soleil établie par Hipparque; il trouve les mêmes durées pour l'année tropique, $365^j \frac{1}{4}$ moins $\frac{1}{300}$, et pour les quatre saisons; la même excentricité $\frac{1}{24}$ pour l'orbite, enfin la même équation du centre. L'intervalle qui le séparait d'Hipparque eût dû lui permettre d'atteindre à une plus grande approximation.

C'est la théorie de la Lune qui fournit à Ptolémée l'occasion de sa première découverte.

Hipparque n'avait nettement reconnu dans le mouvement de notre satellite qu'une seule inégalité, comme dans celui du Soleil, et, quoique certaines observations lui eussent donné quelques doutes, il faisait les deux théories en tout semblables, sauf en ce qui concerne les valeurs numériques.

Ptolémée démontra que l'on ne pouvait accorder la théorie de la Lune avec les observations qui avaient embarrassé Hipparque.

Mais il est indispensable d'indiquer ici la transformation géométrique que pouvait subir l'hypothèse d'Hipparque sur les mouvements uniformes du Soleil et de la Lune dans des cercles excentriques à la Terre, transformation qu'Hipparque, au reste, connaissait sans doute, s'il est vrai qu'Apollonius de Perge soit tombé d'abord sur cette seconde manière de concevoir le mouvement des astres.

Si l'on considère la circonférence d'un cercle de centre O, nommé *excentrique*, décrite par un point S, et un point T pris dans l'intérieur de ce cercle ; si d'ailleurs par chaque point S de cette circonférence on mène une droite Sσ égale et parallèle à OT, le lieu des points σ sera l'excentrique O transporté parallèlement à lui-même, dans la direction OT, et d'une longueur égale à OT ; ce sera la circonférence d'un cercle ayant T pour centre, et qui prendra le nom de *déférent*.

Réciproquement, si de chaque point σ de la circonférence du déférent on mène une droite σS égale et parallèle à TO, on retrouvera l'excentrique.

Mais le point S appartiendra à la circonférence d'un cercle de grandeur constante, décrit de σ comme centre, avec TO pour rayon : ce troisième cercle sera l'*épicycle*, et le point S, au lieu d'être supposé parcourir l'excentrique O, pourra être supposé décrire l'épicycle σ, tandis que le centre σ de cet épicycle décrirait le déférent T.

Si le mouvement de S sur l'excentrique était uniforme, le mouvement de σ sur le déférent le serait aussi ; et la droite σS ayant une direction constante, le mouvement de S sur l'épicycle, par rapport au point de l'épicycle déterminé par son intersection avec Tσ prolongé, le serait aussi.

Dans tous les cas, la durée de la révolution du point S sur l'épicycle sera égale à la durée de sa révolution sur l'excentrique, s'il s'agit du Soleil.

D'ailleurs le maximum et le minimum de la distance TS arriveront lorsque le point σ se trouvera, sur le déférent, aux deux extrémités du diamètre TO.

Ptolémée n'eut pas à recourir à ce changement de point de vue

dans la théorie du Soleil, et la conserva telle qu'elle avait été donnée par Hipparque; mais, en ce qui concerne la Lune, il démontra qu'il faudrait supposer que l'épicycle fût porté sur un excentrique mobile dont le centre tournât autour de la Terre de manière à se trouver quatre fois, dans le cours d'une lunaison, c'est-à-dire aux syzygies et aux quadratures, sur la ligne des centres de la Terre et de l'épicycle, entre ces deux centres aux époques des syzygies, et en dehors d'eux aux quadratures.

En d'autres termes, le centre de l'épicycle devrait être apogée dans les syzygies et périgée dans les quadratures.

Dans cette hypothèse, le mouvement du centre de l'excentrique se ferait dans le sens contraire à celui du mouvement diurne; celui du centre de l'épicycle sur l'excentrique, dans le même sens que le mouvement diurne; enfin celui de la Lune sur son épicycle, dans le sens contraire.

Cette importante découverte suffirait seule, dit Delambre, pour placer son auteur parmi les astronomes de première ligne; elle permit à Ptolémée de dresser pour la Lune des tables plus exactes que celles qu'on avait avant lui et de déterminer à l'avance avec plus de certitude les époques des éclipses et leur grandeur.

Tout le monde sait combien étaient compliquées les théories imaginées par Ptolémée pour arriver à conserver aux mouvements des planètes la circularité et l'uniformité.

Avec les idées préconçues et généralement admises de l'immobilité de la Terre, de son importance dans le monde, de la dignité relative du mouvement circulaire uniforme, et beaucoup d'autres, il n'était guère possible à Ptolémée de faire des hypothèses plus simples que celles où il a été conduit par la nécessité d'expliquer

les inégalités si prononcées des mouvements observés, notamment les stations et les rétrogradations.

La complication, au reste, n'est pas aussi énorme qu'on est généralement tenté de le supposer d'après les reproches faits à Ptolémée par les Coperniciens, au moment de la réforme.

Son système est toujours analogue à celui que nous avons indiqué pour la Lune : la planète décrit un épicycle dont le centre parcourt un cercle excentrique à la Terre; le centre de cet excentrique est lui-même mobile autour d'un point convenablement choisi; enfin le plan de l'épicycle éprouve un balancement convenable.

Pour Mercure et Vénus, le centre de l'épicycle a naturellement un mouvement à peu près égal à celui du Soleil, et le rayon de cet épicycle est à peu près la distance de la planète au Soleil, prise au moment de la plus grande élongation; les points apogée et périgée se trouvent près du Soleil, comme cela doit être. Pour les planètes supérieures, le périgée correspond à l'opposition et l'apogée à la conjonction, ce qui est conforme à la réalité.

La combinaison de tous ces mouvements reproduit, en définitive, à peu près les mouvements apparents de toutes les planètes.

« Ptolémée, dit Delambre, par ses recherches sur la Lune et Mercure, par ses hypothèses compliquées, mais ingénieuses, a eu la gloire de préparer les voies à Kepler, qui les a préparées à Newton. »

Les Tables qu'il avait dressées des mouvements des planètes donnaient, de son temps, leurs positions à un quart de degré près. Or, si l'on songe à l'imperfection des moyens d'observation et à la grossièreté des instruments, une pareille erreur doit être regardée comme assez petite.

Tout ce qui concerne les planètes, dans le système décrit dans l'*Almageste*, appartient en propre à Ptolémée, comme nous l'avons déjà dit. Les observations même ne sont plus empruntées à Hipparque, ce qui, du reste, n'établit pas qu'elles aient été faites par Ptolémée lui-même.

Le préambule de cette partie de l'ouvrage est remarquable à plus d'un titre et fait le plus grand honneur au caractère de l'auteur, qui ne craint pas de rendre une entière justice à Hipparque.

Ptolémée tenta de perfectionner les méthodes d'Hipparque pour la détermination de la parallaxe de la Lune, mais il ne parvint pas à de meilleurs résultats que son illustre devancier.

L'*Optique* de Ptolémée ne nous est connue que par de mauvaises traductions latines faites sur des manuscrits arabes peu complets. Les Grecs se faisaient une singulière idée de la vision ; ils se figuraient le rayon visuel partant de l'œil et allant chercher l'objet. S'il rencontrait un corps impénétrable, il se réfléchissait en faisant des angles égaux de part et d'autre de la normale, pour aller ensuite saisir les objets placés sur son nouveau chemin ; s'il rencontrait une surface pénétrable, il la traversait en se réfractant et allait voir les objets placés au delà. Après avoir exposé ces idées, Ptolémée passe à la théorie des miroirs. Le dernier livre est consacré à la réfraction : Ptolémée en donne des Tables de dix en dix degrés pour les passages de l'air dans l'eau et dans le verre ; l'ouvrage se termine par des idées justes sur la réfraction astronomique, dont quelques valeurs, à peu près exactes, sont indiquées.

Le *Planisphère* est la projection stéréographique, conçue par Hipparque, de la sphère des étoiles fixes et des orbites des pla-

nètes ; le point de vue est placé au pôle austral du monde. Ptolémée savait que tous les cercles de la sphère sont représentés par d'autres cercles; il ignorait la conservation des angles aux points d'intersection.

L'*Analemme* a pour objet la construction des cadrans solaires.

La Géométrie pure a aussi des obligations à Ptolémée. C'est sans doute à lui qu'est due la découverte de cette proposition importante dans la théorie des transversales, que toute droite menée dans le plan d'un triangle détermine sur les côtés, à partir des sommets, six segments tels que le produit de trois d'entre eux, n'ayant pas d'extrémité commune, est égal au produit des trois autres.

Il nous reste à faire connaître un peu plus complètement le système de Ptolémée et à montrer comment il suffisait à peu près, non seulement à la représentation des mouvements apparents, mais même à permettre la construction de tables pouvant donner approximativement pendant quelques années les lieux des différents astres composant notre système planétaire.

SYSTÈME DE PTOLÉMÉE.

Nous avons vu qu'en ce qui concerne le Soleil, comme il ne s'agissait que de tenir compte de l'excentricité de son orbite, attestée par les variations de sa vitesse angulaire, il était indifférent de lui donner pour trajectoire un cercle excentrique ayant son centre sur la droite menée de la Terre à la position apogée du Soleil, et entre les deux points, ou de le faire mouvoir sur un épicycle dont le centre décrirait un cercle concentrique à la

Terre, pourvu que le centre de cet épicycle fût placé entre la Terre et le Soleil, au moment de l'apogée, et qu'au contraire le Soleil se trouvât entre la Terre et le centre de son épicycle, au moment du périgée; les deux mouvements étant du reste uniformes et les révolutions d'égale durée.

Il en était à peu près de même de la Lune, dont on déterminait, comme pour le Soleil, les positions apogée et périgée ainsi que l'excentricité. Mais tandis que le mouvement du périgée solaire est si lent qu'il n'avait pas pu être aperçu par Ptolémée, au contraire, celui du périgée lunaire est très appréciable. Ce point décrit en effet un cercle entier sur la sphère en un peu moins de 9 ans ($3232^{j}, 57$). En conséquence, on avait dû modifier les hypothèses et supposer soit que le centre de l'excentrique lunaire tournait en 9 ans dans un cercle concentrique à la Terre, ou bien, dans l'hypothèse du déférent et de l'épicycle, que cet épicycle n'était pas précisément décrit par la Lune, mais par le centre d'un second épicycle, plus petit, sur lequel se mouvait la Lune.

Quant au mouvement de la ligne des nœuds de la Lune, qui est l'analogue du mouvement de la ligne des équinoxes, il n'y avait, pour en tenir compte, qu'à faire tourner en $18^{\text{ans}}\,\frac{2}{3}$ ($6793^{j}, 39$) le plan de l'orbite lunaire autour de l'axe de l'écliptique, ou du zodiaque.

Hipparque avait fixé à 5° l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique; mais cette inclinaison n'est pas constante; il fallait donc supposer au plan de l'orbite un léger balancement autour de la ligne des nœuds.

Mais, si les mouvements du Soleil et de la Lune dans leurs orbites présentaient quelques inégalités, du moins les vitesses conservaient toujours le même sens.

Les vitesses angulaires des planètes, au contraire, présentent des changements de sens qui avaient déjà attiré l'attention des observateurs même avant Hipparque, et c'est, paraît-il, pour expliquer ces changements de sens qu'Apollonius avait imaginé la combinaison de l'épicycle et du déférent, combinaison qui fut adoptée par Ptolémée et dont il étendit l'usage à la constitution des théories de la Lune et du Soleil.

Il est certain qu'en l'absence de tout moyen d'apprécier les distances vraies des astres il était difficile d'imaginer des hypothèses plus simples, pour rendre compte de mouvements si singuliers.

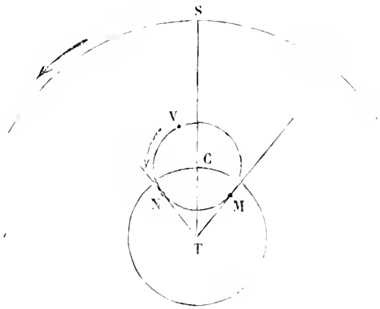
Considérons d'abord les deux planètes inférieures, Vénus et Mercure. Ces planètes ne s'éloignent jamais beaucoup du Soleil, mais elles se trouvent tantôt à sa droite par rapport à nous, tantôt à sa gauche; il fallait donc les faire mouvoir autour de points décrivant des courbes à peu près semblables à la trajectoire du Soleil.

Vénus, par exemple, s'éloigne successivement dans les deux sens de 46° environ du Soleil; on donnera donc à son épicycle CV (*fig.* 36) des dimensions telles que, vu de la Terre, le cercle sous-tende un angle de 92°. Pendant que Vénus le parcourra, le centre C de l'épicycle décrira lui-même le déférent TC autour de la Terre, et, pour que les mouvements direct et rétrograde du point V concordent avec les mouvements direct et rétrograde de la planète, on donnera au point C, sur le déférent, la vitesse angulaire du Soleil, et au point V, sur l'épicycle, la vitesse indiquée par la somme des durées du mouvement direct, de M en N, et du mouvement rétrograde, de N en M.

Comme Vénus est tantôt un peu au-dessus de l'écliptique et

tantôt un peu au-dessous, on donnera au plan de l'épicycle une

Fig. 36.



petite inclinaison par rapport au plan de l'écliptique ou du déférent.

Les hypothèses étaient à peu près les mêmes pour Mercure, quoiqu'un peu plus compliquées, parce que les élongations maxima de Mercure, à l'est et à l'ouest du Soleil, ne restent pas à peu près constantes, comme pour Vénus; elles varient entre $16^{\circ}\frac{1}{4}$ et $28^{\circ}\frac{3}{4}$. On compensait cette inégalité pas l'introduction de nouveaux épicycles.

Il importe de remarquer que ces théories ne font aucunement acception des distance vraies; par exemple, en ce qui concerne Vénus, le rayon de l'épicycle peut être pris arbitrairement, seulement l'élongation maximum assigne une valeur déterminée au rapport des rayons de l'épicycle et du déférent. On aurait pu, si on l'avait voulu, donner le Soleil lui-même pour centre aux épicycles de Vénus et de Mercure; alors les déférents se seraient confondus avec l'écliptique. Cette hypothèse fut, en effet, introduite avant Copernic.

Les anciens ne savaient pas du tout où placer Vénus et Mercure; les uns les mettaient entre le Soleil et la Terre, les autres au delà du Soleil. Ptolémée les mettait entre le Soleil et la Terre, et il supposait Mercure plus près de nous que Vénus.

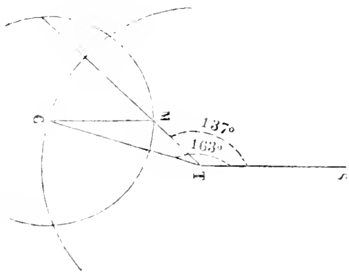
Considérons maintenant une planète supérieure, Mars, par exemple : cette planète, comme toutes les planètes supérieures, et c'est par là seulement que les anciens les distinguaient des planètes inférieures, peut se trouver à toutes les distances angulaires du Soleil.

Le mouvement de Mars projeté sur la sphère des étoiles est direct pendant 707 jours environ et rétrograde pendant les 73 jours qui suivent. Sa vitesse dans le sens direct croît pendant à peu près la première moitié des 707 jours, décroît pendant la seconde moitié, s'annule au bout des 707 jours, change ensuite de sens, croît pendant la première moitié des 73 jours, décroît pendant la seconde et redevient nulle avant de changer de nouveau de sens.

De plus, les stations se font toujours à peu près aux mêmes distances angulaires par rapport au Soleil. La station qui précède le changement de sens, de rétrograde en direct, a lieu lorsque la planète se trouve à peu près à 137° du Soleil du côté de l'Orient; à partir de ce moment, la vitesse croît et en même temps Mars se rapproche du Soleil. Sa vitesse croît jusqu'au moment de la conjonction. La planète passe ensuite à l'occident du Soleil; son mouvement reste direct, mais sa vitesse décroît jusqu'à ce que la distance angulaire des deux astres redevienne égale à 137° à peu près. Alors le mouvement devient rétrograde, sa vitesse croît jusqu'à l'instant de l'opposition; elle décroît ensuite et s'annule de nouveau à 137° du Soleil.

On aura donc une représentation sensiblement exacte du mouvement de Mars en imaginant qu'il décrive un épicycle CM (*fig.* 37) dont le centre parcourrait un déférent TC concentrique

Fig. 37.



à l'orbite TS du Soleil, sous la condition que le rayon CM reste toujours parallèle au rayon TS (afin que les oppositions et conjonctions de la planète coïncident avec les oppositions et conjonctions du centre de son épicycle) et sous une autre que nous allons établir.

Il s'écoule 780 jours entre deux conjonctions consécutives du centre de l'épicycle et du Soleil ; pendant ce temps, le Soleil a parcouru deux fois 360° et 60° en plus ; le centre de l'épicycle a donc parcouru par rapport aux étoiles 360° + 60° ou 420° ; la vitesse angulaire moyenne de ce point est donc $\frac{420}{780}$ degrés ; la différence des deux vitesses est en conséquence

$$\left(\frac{360}{365} - \frac{420}{780}\right) \text{ degrés}$$

ou à peu près

$$\frac{36}{78} \text{ de degré.}$$

Le produit de cette différence par $\frac{1}{2}$ 707 ou 353 donne à peu près 163°. Ainsi la distance angulaire du Soleil au centre de l'épicycle, au moment de la station, doit être de 163°.

Soient TS la direction dans laquelle se trouve le Soleil, au moment de la station, STC l'angle de 163° et STM l'angle de 137°; la ligne qui joint Mars au centre de son épicycle doit être comprise entre TM et TC, et doit être parallèle à ST. On peut donc mener arbitrairement MC parallèle à ST: le cercle décrit de T comme centre avec TC pour rayon sera le déférent, et le cercle décrit de C comme centre avec CM comme rayon sera l'épicycle. Quant à l'orbite du Soleil, son rayon sera arbitraire.

Ainsi le rapport des rayons du déférent et de l'épicycle est déterminé, mais on peut prendre à volonté celui que l'on veut des deux.

La théorie est absolument la même pour Jupiter et Saturne.

Les anciens plaçaient les planètes supérieures à des distances de la Terre plus grandes que celle du Soleil : Mars d'abord, ensuite Jupiter, puis Saturne. Ils n'avaient d'ailleurs pour cela d'autres raisons que les longueurs des durées des révolutions.

Moyennant les hypothèses que nous venons d'indiquer et moyennant de légères corrections que l'observation indiquait, les lieux des cinq planètes concordaient assez bien avec ceux que fournissait la théorie.

On conçoit donc parfaitement que le système de Ptolémée ait paru aux anciens si admirable et ait obtenu pendant si longtemps l'assentiment de tous les astronomes. On conçoit même parfaitement qu'en présence d'un accord si heureusement obtenu, Ptolémée n'ait pas cherché mieux.

Cependant la solution adoptée présente un caractère de singu-

larité particulier, qui aurait pu faire douter de son exactitude. En effet, tout avait été fait en vue de conserver à la Terre sa majestueuse immobilité au centre du monde; et cependant la Terre n'intervenait en rien dans la direction du mouvement général, tandis que le Soleil conduisait autour d'elle son cortège de planètes, dont il semblait tenir les rênes passées sur les centres des épicycles comme sur des poulies, mais ensuite toutes parallèles entre elles.

Il est évident que le Soleil avait le beau rôle.

C'est cette singularité qui fournira à Copernic les preuves les plus convaincantes, aux yeux des vrais géomètres, contre le système de Ptolémée.

Lorsqu'il montrera que les stations et rétrogradations apparentes des planètes, qui avaient suggéré l'invention d'épicycles portés sur des déférents, sous les conditions précitées, s'expliquent tout naturellement par l'observation des mouvements relatifs de la Terre par rapport aux diverses planètes, la conviction éclatera entière, sans cependant que la Science ait fait de nouveaux progrès. Mais il faudra bien du temps avant qu'un système cosmogonique aussi parfait relativement que celui qu'avaient fondé Apollonius, Hipparque et Ptolémée puisse seulement tomber en suspicion.

Delambre, pour rehausser la gloire de Copernic, veut croire et finit par se persuader que ce grand homme a conçu le premier l'idée de faire tourner la Terre autour du Soleil en une année et autour de la ligne de ses pôles en vingt-quatre heures.

Il s'étonne que les Pythagoriciens, s'ils avaient cette idée, ne l'aient pas mieux fait valoir, qu'ils n'aient pas mieux soutenu la lutte. Il en conclut que s'ils ont eu le sentiment qu'on leur attribue, ce n'était chez eux qu'une idée en l'air, née de l'envie de ne pas penser comme on pensait dans les écoles rivales.

Je crois qu'on pourrait expliquer assez simplement leur silence. Et d'abord, si l'on en excepte Aristarque de Samos, les Pythagoriciens étaient d'assez pauvres géomètres. D'un autre côté, tous les Pythagoriciens un peu célèbres sont antérieurs à Hipparque, de sorte que, les méthodes d'observation n'étant pas encore créées de leur temps, les faits n'étaient pas même assez bien étudiés pour pouvoir servir de bases à un échafaudage scientifique. Il resterait bien, il est vrai, ce pauvre Théon de Smyrne; mais de quel poids eût-il pesé en balance avec Apollonius et Hipparque?

Les Pythagoriciens ont dit ce qu'il y avait à dire au sujet du mouvement diurne, et Copernic n'a rien ajouté aux preuves qu'ils fournissaient à cet égard. Quant au mouvement de translation autour du Soleil, s'ils n'ont pas cherché à en donner des preuves, c'est qu'ils ne les avaient pas ou ne pouvaient les faire valoir, ce qui ne doit pas étonner.

GALIEN.

(Né à Pergame vers 130.)

Son père, Nicon, était un riche architecte; il présida à son éducation avec une grande sollicitude.

Galien fréquenta successivement toutes les écoles philosophiques, mais ne s'attacha à aucune.

Il commença ses études médicales à dix-sept ans; après avoir suivi les leçons des plus habiles médecins de son temps à Smyrne, à Corinthe, à Alexandrie, il revint à Pergame où il fut nommé médecin des gladiateurs.

Cette fonction dirigea naturellement ses efforts vers l'Anatomie, à laquelle il fit faire en effet de grands progrès.

Des troubles qui survinrent dans sa patrie l'engagèrent à aller chercher à Rome un théâtre plus vaste où il obtint aussitôt les plus grands succès.

Il était le médecin préféré des grands et de l'empereur, et le cours d'anatomie qu'il professait au temple de la Paix était suivi par une foule d'auditeurs.

Mais la peste se déclara à Rome, et Galien aussitôt, *urbe excedens, in patriam properavit,* c'est lui-même qui le dit.

Marc-Aurèle, méditant de porter la guerre en Germanie, désira avoir près de lui Galien et le rappela. Mais Galien n'aimait pas plus la guerre que la peste : il partit, mais eut soin de prendre le plus long chemin. Marc-Aurèle finit par le dispenser de le suivre, à condition que pendant l'absence de l'empereur il resterait attaché à la maison de son fils Commode.

On ne sait à quelle époque il quitta définitivement Rome pour retourner à Pergame.

« Galien, dit Cuvier, est le premier anatomiste véritable que l'antiquité ait produit. »

SEXTUS EMPIRICUS.

(Né probablement à Mitylène vers 200.)

Médecin, philosophe et astronome, il a laissé une dissertation contre les astrologues. « Les Chaldéens, dit-il, divisaient le zodiaque en douze signes dont chacun dominait sur une partie du corps. Quand une femme était sur le point d'accoucher, un Chaldéen se tenait hors de la maison, sur un point élevé, pour observer les levers successifs des astres; un autre, qui assistait la malade, attendait le

moment de la délivrance pour en donner le signal à l'aide d'une cymbale. L'astre qui avait paru à l'horizon au moment même de la naissance de l'enfant devait exercer sur lui une influence bonne ou mauvaise pendant toute la durée de son existence. »

Empiricus demande pourquoi on avait choisi plutôt l'instant de la naissance que celui de la conception, mais surtout comment on peut fixer l'instant de la naissance, lorsque l'accouchement dure quelque temps. Il ajoute, et c'est là ce que son livre présente d'intérêt au point de vue historique, que lar éfraction atmosphérique relève les astres, et que, par conséquent, celui qui se montre à l'horizon à un moment donné ne l'a, en réalité, pas encore atteint.

Les écrits qui nous restent d'Empiricus ont été publiés, avec traduction latine, par Fabricius (Leipzig, 1718). Huart en a donné une traduction française (Amsterdam, 1725).

EUSÈBE DE CÉSARÉE.

(Né en Palestine vers 264, mort vers 338.)

Évêque de Césarée. C'est lui qui remit en honneur le cycle de Méthon, qui fut plus tard adopté par le concile de Nicée. Il croyait, du reste, la période de Méthon rigoureusement exacte, et le concile de Nicée partagea son erreur.

ZÉNODORE.

(Né vers 290.)

Il avait laissé un *Traité des isopérimètres* qui ne nous est pas parvenu, mais que nous connaissons en partie par le commentaire de Théon sur la syntaxe de Ptolémée.

Zénodore démontrait que, parmi les figures isopérimètres d'un même nombre de côtés, la plus grande est celle qui a ses côtés égaux et ses angles égaux. Il en concluait la propriété du cercle d'envelopper la surface maximum pour un périmètre donné.

THÉON D'ALEXANDRIE.

(Né vers 320, mort vers 395.)

Père d'Hypathia. On sait seulement de lui qu'il observa en 365 les éclipses de Lune et de Soleil.

Ceux de ses ouvrages qui nous restent sont un commentaire sur les *Éléments* d'Euclide; des scolies sur Aratus; une suite au canon de Ptolémée; des tables astronomiques et des commentaires en onze livres sur la syntaxe de Ptolémée.

Ce dernier ouvrage, qui a été publié dans l'édition *princeps* de l'*Almageste*, est intéressant, parce qu'il contient des modèles de calculs arithmétiques dont Ptolémée ne donnait jamais que les résultats.

L'ALGÈBRE DES GÉOMÈTRES GRECS.

En terminant l'histoire de la glorieuse époque que nous venons de parcourir, et au moment d'entrer dans une période de décadence où les plus beaux ouvrages d'Archimède, d'Apollonius, d'Euclide et d'Hipparque ne seront plus même lus, de sorte qu'il ne nous en parviendra que des exemplaires tronqués, tandis que, par exemple, on réservera à notre admiration le poème d'Aratus, il paraîtra sans doute intéressant d'examiner si l'importante révolution qui s'est produite sans méthode, comme sans direction et sans prévisions, durant cette période singulière, était bien légitime; si le progrès n'aurait pas pu se produire, avec avantages, dans le sens opposé; si ce n'est pas la médiocrité des hommes nouveaux, incapables de suivre la tradition léguée par leurs grands prédécesseurs, qui les a amenés à faire porter les bases des théories mathématiques sur un terrain nouveau; enfin si le progrès accompli ne cache pas une véritable rétrogradation.

Les éléments de l'Algèbre se trouvent dans les livres d'Euclide, que ses successeurs, qui les ont peu compris, ont appelés *arithmétiques,* quoiqu'ils continssent la théorie des rapports et pro-

portions entre grandeurs concrètes; mais les exemples caractéristiques que nous avons extraits d'Archimède et d'Apollonius montrent clairement que ces géomètres avaient beaucoup étendu, pour leur usage, cette Algèbre rudimentaire.

Comme, après avoir découvert analytiquement leurs plus beaux théorèmes, ils ont cru devoir en donner des démonstrations *a posteriori* que l'on pût comprendre, sans participer de leur génie, et que l'on ne pût pas ne pas comprendre, pourvu qu'on suivît de point en point leurs longs raisonnements, il ne nous est parvenu aucune trace des procédés algébriques à l'aide desquels ils transformaient si merveilleusement les relations qu'ils rencontraient dans leurs recherches.

Mais il nous a paru qu'en se pénétrant de leurs vues on pouvait reconstituer cette Algèbre perdue, que Viète appellera plus tard *speciosa*, par opposition à l'Algèbre *numerosa* de la période qui nous occupe, et à laquelle, d'un seul trait de génie, Descartes a donné en quelques lignes sa constitution définitive, sans, du reste, avoir pu réagir contre la nouvelle tradition, déjà universellement suivie, à ce point que son commentateur immédiat, le P. Rabuel, n'a même pas aperçu la méthode par laquelle notre philosophe trouvait le moyen d'introduire dans les formules algébriques les grandeurs elles-mêmes, comme dans l'antiquité, et non plus leurs mesures, comme on avait fait depuis les anciens géomètres jusqu'à lui.

Nous ne pouvons naturellement pas nous étendre beaucoup, dans cette *Histoire*, sur une méthode qui ne s'est pas produite au grand jour. Mais il suffira de quelques indications pour permettre de la reconstituer tout entière, au moins dans ses bases fondamentales.

Voici, il nous semble, comment l'Algèbre pouvait, dès l'antiquité, être instituée dans son office essentiel, qui est de donner le moyen de formuler les lois, sans qu'il fût nécessaire pour cela de recourir à l'intervention d'aucun artifice étranger.

Proposition I.

On obtient le rapport de deux grandeurs de même espèce au moyen des opérations qui en fournissent la plus grande commune mesure.

Si deux grandeurs A et B ont pour plus grande commune mesure une grandeur M, et que cette plus grande commune mesure y soit respectivement contenue a fois et b fois, A est a fois la $b^{\text{ième}}$ partie de B, et le rapport de A à B est $\frac{a}{b}\cdot$ En même temps, le rapport de B à A est $\frac{b}{a}\cdot$

Si les opérations instituées pour obtenir la plus grande commune mesure entre A et B devaient se prolonger indéfiniment, comme il arrive lorsque l'on compare la diagonale d'un carré à son côté, les deux grandeurs A et B seraient incommensurables, et leur rapport ne pourrait pas être formulé exactement.

Définition. — Le rapport de deux grandeurs A et B est dit égal à celui de deux autres grandeurs C et D, lorsque les deux séries finies ou indéfinies d'opérations instituées pour obtenir la plus grande commune mesure entre A et B d'une part, entre C et D de l'autre, fournissent la même suite de quotients, de sorte que deux restes de mêmes rangs soient toujours respectivement contenus le même nombre de fois dans les restes précédents.

PROPOSITION II.

Si l'on arrête successivement les opérations de la recherche de la plus grande commune mesure entre deux grandeurs A et B après la première, après la seconde, etc., et que l'on prenne les expressions approchées du rapport, en considérant successivement comme nuls le premier reste, le second, etc., ces expressions sont alternativement trop petites ou trop grandes.

En effet, supposons que l'on ait trouvé, par exemple,

$$\begin{aligned} A &= 2B + R, \\ B &= 3R + R_1, \\ R &= 4R_1 + R_2, \\ R_1 &= 2R_2 + R_3, \\ R_2 &= 5R_3 + R_4; \end{aligned}$$

négligeons le reste R_4 et concevons la grandeur A' qui, comparée à B, donnerait

$$\begin{aligned} A' &= 2B + R', \\ B &= 3R' + R'_1, \\ R' &= 4R'_1 + R'_2, \\ R'_1 &= 2R'_2 + R'_3, \\ R'_2 &= 5R'_3. \end{aligned}$$

Ces égalités donnent successivement

$$\begin{aligned} R'_1 &= 10R'_3 + R'_3 = 11R'_3, \\ R' &= 44R'_3 + 5R'_3 = 49R'_3, \\ B &= 147R'_3 + 11R'_3 = 158R'_3, \\ A' &= 316R'_3 + 49R'_3 = 365R'_3; \end{aligned}$$

A' vaudrait donc 365 fois la 158^{e} partie de B.

Négligeons maintenant le reste R_3, et concevons la grandeur A'' qui, comparée à B, donnerait

$$\begin{aligned} A'' &= 2B + R'', \\ B &= 3R'' + R''_1, \\ R'' &= 4R''_1 + R''_2, \\ R''_1 &= 2R''_2; \end{aligned}$$

on tirera de ces égalités

$$\begin{aligned} R'' &= 9R''_2, \\ B &= 29R''_2, \\ A'' &= 67R''_2; \end{aligned}$$

de sorte que le rapport de A'' à B serait $\frac{67}{29}$.

Mais, si l'on s'était servi des égalités primitives, le calcul étant identiquement le même, on aurait trouvé

$$A = 365R_3 + 67R_4,$$

et

$$B = 158R_3 + 29R_4;$$

or le rapport

$$\frac{365R_3 + 67R_4}{158R_3 + 29R_4},$$

étant formé des rapports

$$\frac{365R_3}{158R_3} \quad \text{et} \quad \frac{67R_4}{29R_4}$$

ajoutés termes à termes, est compris entre les deux; la valeur exacte du rapport est donc comprise entre deux de ses valeurs approchées consécutives.

Cela posé, la première valeur approchée du rapport fournie par l'annulation du premier reste R serait évidemment trop petite; donc la seconde serait trop grande, la troisième trop petite, etc.

Plus généralement, les valeurs approchées du rapport, fournies par l'annulation des restes de rangs impairs, sont trop petites, et les autres trop grandes.

Proposition III.

Toutes les valeurs approchées du rapport sont irréductibles, puisque chacune d'elles est fournie par les nombres de fois que deux grandeurs commensurables contiennent respectivement leur plus grande commune mesure.

Proposition IV.

Considérons trois valeurs approchées consécutives du rapport, et, pour cela, supposons que, si l'on eût continué les opérations commencées sur A et B, on eût trouvé

$$R_3 = 6R_4 + R_5;$$

la troisième valeur approchée du rapport, que l'on obtiendrait en négligeant R_5, se formera en remplaçant R_3 par $6R_4$ dans l'expression

$$\frac{365R_3 + 67R_4}{158R_3 + 29R_4},$$

ce qui donnera

$$\frac{365 \times 6R_4 + 67R_4}{158 \times 6R_4 + 29R_4},$$

ou

$$\frac{365 \times 6 + 67}{158 \times 6 + 29};$$

d'où résulte la règle suivante :

Si

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

représentent trois valeurs consécutives approchées du rapport, et si a_n désigne le nombre de fois que le dernier reste employé est contenu dans l'avant-dernier,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Proposition V.

On conclut de là, par des opérations portant simplement sur des nombres entiers, que la différence entre deux valeurs consécutives approchées du rapport,

$$\frac{P_n}{Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

est toujours

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}},$$

qu'elle va donc toujours en diminuant; que, par conséquent, une valeur approchée de rang impair est moindre qu'une valeur approchée de rang pair; que les valeurs approchées de rangs impairs vont en augmentant et les autres en diminuant; enfin, que l'erreur commise en prenant une valeur approchée du

rapport, pour sa valeur exacte, décroît indéfiniment, lorsque le rang de cette valeur approchée croît suffisamment.

Proposition VI.

Axiome. — Si une grandeur est composée de plusieurs autres, par voie d'additions et de soustractions, on peut changer à volonté l'ordre des additions et des soustractions, pourvu que chaque grandeur reste, dans tous les cas, additive ou soustractive.

Proposition VII.

Si deux rapports sont égaux dans un sens, ils le sont aussi dans l'autre, c'est-à-dire si

$$A : B :: C : D,$$

inversement,

$$B : A :: D : C.$$

En effet, si les quotients successifs obtenus dans un sens sont 2, 3, 4, 2, 5, ..., ils sont, dans le sens contraire, 0, 2, 3, 4, 2, 5, ...

Définition. — La quatrième proportionnelle X à trois grandeurs A, B, C est définie par la proportion

$$A : B :: C : X,$$

ou par son équivalente

$$X : C :: B : A;$$

on dit qu'elle est égale à C, multipliée dans le rapport de B à A, et l'on écrit

$$X = C \times \frac{B}{A}.$$

Proposition VIII.

Axiome. — Pour multiplier dans un rapport donné une grandeur composée de plusieurs autres, par voie d'additions ou de soustractions, on peut multiplier dans ce rapport donné les parties de la grandeur composée, et ajouter, ou retrancher, dans le même ordre, les produits obtenus.

De même, si l'antécédent du rapport multiplicateur est composé de parties, on pourra multiplier la grandeur proposée dans les rapports des parties de l'antécédent au conséquent, et combiner les produits obtenus comme devaient être combinées les parties de l'antécédent.

Proposition IX.

Si

$$A = B \times \frac{C}{D},$$

réciproquement

$$B = A \times \frac{D}{C},$$

car la proportion

$$A : B :: C : D$$

donne

$$B : A :: D : C.$$

Proposition X.

Si

$$A = B \times \frac{C}{D}$$

et que A, B, C, D soient de même nature, on peut écrire

$$A = C \times \frac{B}{D}$$

En effet, si B et C étaient égaux, la proposition serait évidente; supposons-les différents, et soient

$$A = B \times \frac{C}{D} \quad \text{et} \quad A' = C \times \frac{B}{D},$$

je dis que

$$A' = A.$$

En effet, soit

$$B = 2C + R :$$

$$A = (2C + R) \times \frac{C}{D} = 2C \times \frac{C}{D} + R \times \frac{C}{D},$$

et

$$A' = C \times \frac{2C + R}{D} = 2C \times \frac{C}{D} + C \times \frac{R}{D};$$

donc

$$A' - A = C \times \frac{R}{D} - R \times \frac{C}{D}.$$

Soit

$$C = 3R + R_1;$$

on verra de même que

$$A' - A = R_1 \times \frac{R}{D} - R \times \frac{R_1}{D};$$

et ainsi de suite.

Mais, en continuant ainsi, on arriverait à des restes moindres que toute quantité donnée; la différence $A' - A$ serait donc moindre que toute quantité donnée, ce qui ne peut être que si elle est nulle.

Proposition XI.

Si une grandeur résulte de plusieurs multiplications successives, on peut échanger entre eux, de toutes les manières possibles, les antécédents des rapports multiplicateurs, ou les conséquents, pourvu que les termes échangés soient de même nature.

Ainsi, par exemple,

$$A\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{D}{E}\cdot\frac{F}{G}=A\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{F}{E}\cdot\frac{D}{G}.$$

En effet, la proposition serait évidente si D et F étaient égaux; et on la démontrera, dans l'autre cas, par le même moyen qu'on a employé pour établir la proposition X.

S'il s'agissait d'échanger deux conséquents, E et G par exemple, on remarquerait qu'en appelant X la grandeur

$$A\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{D}{E}\cdot\frac{F}{G},$$

on aurait

$$A=X\cdot\frac{C}{B}\cdot\frac{E}{D}\cdot\frac{G}{F}=X\cdot\frac{C}{B}\cdot\frac{G}{D}\cdot\frac{E}{F};$$

d'où

$$X=A\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{D}{G}\cdot\frac{F}{E}=A\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{D}{E}\cdot\frac{F}{G}.$$

Corollaire I. — L'ordre dans lequel les antécédents et les conséquents doivent être accouplés étant indifférent, il en résulte que, pour noter le produit de plusieurs multiplications, il suffit de fournir le groupe des antécédents et celui des conséquents,

sans y mettre d'ordre, et qu'au lieu d'écrire, par exemple,

$$X = A \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{D}{E} \cdot \frac{F}{G},$$

on peut écrire

$$X = A \cdot \frac{B.D.F}{C.E.G}.$$

Corollaire II. — Comme la grandeur multipliée pourrait elle-même être échangée avec un des antécédents de même nature, on pourra aussi, au lieu de

$$A \frac{B.D.F}{C.E.G},$$

écrire

$$\frac{A.B.D.F}{C.E.G.},$$

ou, plus simplement,

$$\frac{ABDF}{CEG}.$$

Corollaire III. — Si un antécédent se trouve égal à un conséquent, on pourra supprimer l'un et l'autre.

Par exemple,

$$A \frac{B}{C} \frac{D}{E} \frac{F}{B} = A \frac{D}{C} \frac{F}{E}.$$

En effet,

$$A \frac{B}{C} \frac{D}{E} \frac{F}{B} = A \frac{B}{B} \frac{D}{C} \frac{F}{E} = A \frac{D}{C} \frac{F}{E},$$

car $A \frac{B}{B}$ est identiquement A, puisque ce produit est défini par la proportion

$$A \frac{B}{B} : A :: B : B.$$

Corollaire IV. — Si plusieurs antécédents sont égaux entre eux, ou plusieurs conséquents, au lieu de répéter cet antécédent ou ce conséquent, on pourra le noter une seule fois, en ayant soin de marquer par un chiffre le nombre de fois qu'il devait être répété.

Par exemple, au lieu de

$$X = A\,\frac{B.B.B.F}{C.D.E.G},$$

on pourra écrire

$$X = A\,\frac{B^3.F}{C.D.E.G}.$$

PROPOSITION XII.

Supposons qu'une grandeur X soit représentée par

$$A\,\frac{BDFHLN}{CEGKMP};$$

il pourra arriver que l'on sache que le groupe d'antécédents $B'D'F'$ pourrait remplacer le groupe BDF, c'est-à-dire que X serait aussi égal à

$$A\,\frac{B'D'F'HLN}{CEGKMP};$$

je dis que s'il en est ainsi, cela sera, quels que soient les autres antécédents et quels que soient les conséquents, et que la condition sera que

$$A_1\,\frac{BDF}{B'D'F'} = A_1.$$

quel que soit A_1; c'est-à-dire que les multiplications successives

d'une grandeur quelconque dans les rapports $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$ la ramènent à son état primitif.

En effet, introduisons à la fois B', D' et F' parmi les antécédents et parmi les conséquents, X n'en éprouvera aucun changement, et l'on aura

$$A\frac{BDFHLN}{CEGKMP} = A\frac{BDFHLNB'D'F'}{CEGKMPB'D'F'},$$

ou, en changeant l'ordre,

$$X = A\frac{B'D'F'HLN}{CEGKMP}\frac{B}{B'}\frac{D}{D'}\frac{F}{F'};$$

mais, par hypothèse,

$$A\frac{B'D'F'HLN}{CEGKMP} = X = A\frac{BDFHLN}{CEGKMP};$$

donc les multiplications successives de X dans les rapports $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$ ramènent cette grandeur à son état primitif.

La même proposition convient évidemment à un groupe quelconque de conséquents.

En effet, de

$$X = A\frac{BDFHLN}{CEGKMP}$$

on tire

$$A = X\frac{CEGKMP}{BDFHLN},$$

de façon que les antécédents deviennent conséquents, et réciproquement.

Note. — Au lieu d'écrire

$$A_1 = A_1 \frac{BDF}{B'D'F'},$$

pour exprimer le fait que la raison composée

$$\frac{BDF}{B'D'F'}$$

ne modifie pas la grandeur à laquelle elle est appliquée, on peut écrire simplement

$$\frac{BDF}{B'D'F'} = 1,$$

ou même, symboliquement,

$$BDF = B'D'F'.$$

Proposition XIII.

Au lieu d'introduire à la suite des autres un rapport multiplicateur, on peut le faire porter, dans le même sens, sur un antécédent quelconque, ou, en sens contraire, sur un conséquent.

Ainsi

$$A\frac{B}{C}\frac{D}{E} = A\frac{B\frac{D}{E}}{C} = A\frac{B}{C\frac{E}{D}}.$$

En effet,

$$A\frac{B\frac{D}{E}}{C} = \left(B\frac{D}{E}\right)\frac{A}{C} = B\frac{D}{E}\frac{A}{C} = A\frac{B}{C}\frac{D}{E};$$

et, de même, si

$$X = A\frac{B}{C\frac{E}{D}},$$

$$A = X\frac{C\frac{E}{D}}{B} = X\frac{C}{B}\frac{E}{D},$$

d'où

$$X = A\frac{B}{C}\frac{D}{E}.$$

Apollonius fait souvent usage de cette proposition; il la démontre de nouveau dans chaque occasion.

DÉFINITION.

Si l'on suppose qu'une grandeur X soit exprimée par

$$A\frac{B_1 B_2 \ldots B_n}{C_1 C_2 \ldots C_n},$$

et que l'on sache qu'on pourrait remplacer tous les antécédents par un seul B, répété n fois, ou tous les conséquents par un seul C, répété n fois, de telle sorte que

$$X = A\frac{B^n}{C_1 C_2 \ldots C_n} = A\frac{B_1 B_2 \ldots B_n}{C^n} = A\frac{B^n}{C^n},$$

B sera appelé moyenne entre $B_1, B_2, \ldots, B_n$; de même, C sera la moyenne entre $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

On pourra écrire

$$B^n = B_1 B_2 \ldots B_n,$$
$$C^n = C_1 C_2 \ldots C_n,$$

et, si l'on veut, on représentera B et C par les symboles

$$B = \sqrt[n]{B_1 B_2 \ldots B_n},$$
$$C = \sqrt[n]{C_1 C_2 \ldots C_n}.$$

PROPOSITION XIV.

Si B est la moyenne d'ordre n entre $B_1, B_2, \ldots, B_n$, de telle sorte que

$$B^n = B_1 B_2 \ldots B_n \quad \text{ou que} \quad B = \sqrt[n]{B_1 B_2 \ldots B_n},$$

et qu'on veuille multiplier B dans le rapport $\frac{P}{Q}$, on aura

$$B\frac{P}{Q} = \sqrt[n]{\left(B_1 \frac{P}{Q}\right)\left(B_2 \frac{P}{Q}\right) \ldots \left(B_n \frac{P}{Q}\right)}$$
$$= \sqrt[n]{B_1 B_2 \ldots B_n \frac{P^n}{Q^n}},$$

et l'on pourra faire porter le multiplicateur $\frac{P^n}{Q^n}$ sur celle des grandeurs $B_1, B_2, \ldots, B_n$ que l'on voudra.

C'est-à-dire que pour multiplier une moyenne d'ordre n dans un rapport donné $\frac{P}{Q}$, on peut multiplier l'une des grandeurs entre lesquelles on prend la moyenne dans le rapport $\frac{P^n}{Q^n}$.

PROPOSITION XV.

Si l'indice d'une moyenne est composé, on pourra extraire la moyenne marquée par cet indice en extrayant des moyennes successives dont les indices seraient respectivement les facteurs du premier indice.

Ainsi, par exemple,

$$\sqrt[6]{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6}$$

s'obtiendra en formant les deux moyennes

$$X = \sqrt[3]{B_1 B_2 B_3} \quad \text{et} \quad Y = \sqrt[3]{B_4 B_5 B_6},$$

puis la moyenne

$$\sqrt[2]{X.Y},$$

l'ordre dans lequel seront groupées les grandeurs considérées étant d'ailleurs indifférent.

En effet, si *Z* désigne

$$\sqrt[6]{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6},$$

on aura par définition

$$\frac{Z^6}{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6} = 1;$$

d'un autre côté, on aura de même

$$\frac{X^3}{B_1 B_2 B_3} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{Y^3}{B_4 B_5 B_6} = 1;$$

d'où

$$\frac{X^3 Y^3}{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6} = 1,$$

et, par suite,

$$\frac{Z^6}{X^3 Y^3} = 1;$$

mais

$$\frac{Z^6}{X^3 Y^3} = 1$$

peut s'écrire

$$\frac{Z^2}{XY}\,\frac{Z^2}{XY}\,\frac{Z^2}{XY} = 1\,;$$

par conséquent,

$$\frac{Z^2}{XY} = 1.$$

Corollaire I. — On peut multiplier l'indice d'une moyenne par un nombre quelconque, pourvu qu'on répète le même nombre de fois chacune des grandeurs entre lesquelles on prend la moyenne.

Ainsi

$$\sqrt[3]{B_1\,B_2\,B_3} = \sqrt[6]{B_1\,B_1\,B_2\,B_2\,B_3\,B_3} = \sqrt[6]{B_1^2\,B_2^2\,B_3^2},$$

car

$$\sqrt[6]{B_1\,B_1\,B_2\,B_2\,B_3\,B_3} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{B_1\,B_1}\;\sqrt[2]{B_2\,B_2}\;\sqrt[2]{B_3\,B_3}} = \sqrt[3]{B_1\,B_2\,B_3}.$$

Corollaire II. — On peut par ce moyen réduire deux moyennes quelconques au même indice.

Proposition XVI.

Pour multiplier une moyenne d'un certain indice dans le rapport de deux moyennes du même indice, on peut multiplier l'une des grandeurs entre lesquelles on doit prendre la première moyenne, dans le rapport composé des rapports des grandeurs entre lesquelles il faut prendre les dernières moyennes.

Par exemple,

$$\sqrt[2]{B_1\,B}\;\frac{\sqrt[2]{C_1\,C_2}}{\sqrt[2]{D_1\,D_2}} = \sqrt[2]{B_1\,B_2\,\frac{C_1}{D_1}\,\frac{C_2}{D_2}}.$$

En effet, soient

$$P = \sqrt[2]{C_1 C_2} \quad \text{et} \quad Q = \sqrt[2]{D_1 D_2};$$

$$\sqrt[2]{B_1 B_2} \frac{\sqrt[2]{C_1 C_2}}{\sqrt[2]{D_1 D_2}} = \sqrt[2]{B_1 B_2 \frac{P}{Q}} = \sqrt[2]{B_1 B_2 \frac{P^2}{Q^2}}$$
$$= \sqrt[2]{B_1 B_2 \frac{C_1 C_2}{D_1 D_2}}.$$

Telle est évidemment l'Algèbre dont faisaient tacitement usage les géomètres grecs pour préparer les démonstrations synthétiques de leurs théorèmes, après s'être servis de l'analyse pour les découvrir. On ne saurait douter que les principes n'en aient été familiers à Archimède et à Apollonius; seulement, comme le génie grec répugnait à l'invention des signes abréviatifs, les géomètres grecs n'avaient de ces principes que des traductions en langage ordinaire, pour ainsi dire intransmissibles; de sorte qu'eussent-ils voulu laisser paraître leurs procédés logistiques, ils ne l'auraient pas pu.

Quant au fait en lui-même, il n'en faudrait pas aller chercher bien loin les preuves. Ainsi, quand, dans la seconde solution qu'il a donnée du problème de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs données, Ménechme remplace les deux moyens égaux d'une proportion par deux autres, dont le premier est une ligne donnée et le second est la troisième proportionnelle à cette ligne donnée et à l'un des moyens égaux, qu'il s'agit d'éliminer, il met bien en pratique l'un des principes de l'Algèbre que nous avons essayé d'esquisser, et même l'un des plus compliqués.

Les propositions que je viens d'énoncer n'étaient pas seulement connues des géomètres grecs; elles leur étaient familières, et ils en

faisaient à chaque instant usage, non pas sous la forme générale que nous avons dû leur donner, mais dans les cas usuels, où ils avaient affaire à deux ou trois raisons superposées. c'est-à-dire à une raison composée de deux ou trois raisons.

Si l'on en voulait une preuve directe, on la trouverait dans Pappus : on sait avec quel soin méticuleux les anciens formaient les énoncés de leurs propositions, au risque de les allonger outre mesure. Or, lorsque Pappus veut définir le lieu des points tels que la raison composée des raisons qu'ont les distances de l'un de ces points à n droites avec ses distances à n autres droites soit une raison donnée, il n'indique aucun ordre à suivre dans la manière d'accoupler les distances aux droites du premier groupe avec les distances aux droites du second groupe, pour former les raisons composantes; il sait donc que cet ordre est indifférent.

Nous n'avons pas l'opuscule où Apollonius traitait la question, mais il est bien clair qu'il avait dû savoir que l'ordre dont nous parlons était indifférent : la solution, quelle qu'elle fût, devait d'ailleurs le montrer; mais s'il y avait eu doute, Pappus nous l'aurait dit.

Nous n'avons, bien entendu, pas la prétention d'avoir retrouvé les démonstrations mêmes que les géomètres grecs devaient s'être faites des règles que nous avons énoncées; nous avons seulement voulu montrer comment, sans changer leurs habitudes d'esprit, ils avaient pu parvenir à la connaissance de ces règles, dont, au reste, ils pouvaient fort bien n'avoir que des démonstrations intuitives. Nous avons voulu montrer aussi avec quelle facilité on aurait, en quelques minutes, sans rien changer aux méthodes des Grecs, effectué avec les plus grands avantages la révolution qui a tant

agité les esprits depuis Diophante jusqu'à Descartes, qui a exigé tant d'efforts et dont les étapes ont été parcourues dans une si grande obscurité.

Tout s'est si singulièrement fait dans cette nouvelle période, qu'on verra les savants se disputer l'honneur d'avoir les premiers introduit les mesures des grandeurs sous forme littérale, et le public admirer une si étonnante nouveauté. Cependant, quand Apollonius introduit dans une formule : *Rectam quæ abscinditur ex diametro inter ordinatim applicatam et verticem sectionis*, en voilà bien des lettres, il n'y en a même que trop ! Nous appelons cette droite x, c'est beaucoup plus simple, mais c'est au fond la même chose ; il n'y a pas une idée de plus dans x que dans *recta quæ abscinditur*, etc., ou, s'il y en a une de plus, c'est cette idée fausse que la traduction des lois exige la représentation des grandeurs en nombres. Les grandeurs, dans Apollonius et dans Archimède, sont longuement littérales, mais elles sont littérales, c'est-à-dire quelconques, et le raisonnement y est général, ainsi que les formules parlées ; tandis que, de Diophante à Descartes ou à Viète, les grandeurs seront représentées par des nombres fixes, le raisonnement n'aura plus aucune généralité, et les résultats ne seront plus exprimés par des formules, ni parlées ni écrites, au moyen ou en fonction des données, mais par des nombres, où il ne restera aucune trace des opérations par lesquelles ces nombres auront été fournis.

C'est bien là, il me semble, du progrès à rebours.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.